塑性理论的动向和未来

后　藤　学

1、前言

考察一下塑性理论的最近动向，不禁使人感到空前混乱。看来问题本身是明确的，焦点在于要在理论中把各向异性和与历史的依赖关系考虑进去。但这样作的途径繁多，加上由于研究人员的专业不同而对理论要求精度的不同，造成了目前议论纷纭的状况。在这个时期来阐述有关塑性理论的展望，对笔者这样能力菲薄的人来说该是多么困难啊。不仅未全面掌握现状，而且对所引用的各个理论也没有完全没有误解的自信。因此，务请将以下论述的展望理解成只是笔者个人的见解。

2、塑性理论的立足点

笔者[1]认为大致有三种观点：

(i) 结晶学或位错理论的观点；

(ii) 基于不可逆过程热力学的观点；

(iii) 连续体力学（理性力学）的观点。

(i) 和 (ii) 是从物理学方面进行考察，而 (iii) 则纯粹以数学上的思考为中心。这样分类当然只是权宜之计，应该将它们看成具有相辅相成的关系，而不是相互抵触的。(i) 还可细分为：(i)-a，以Schmid定律为准则的均匀滑移模型；(i)-b，基于连续分布位错的理论；(i)-c，基于金属物性理论的位错理论，等等。(i)-a，b 本质上属于连续体力学一类。

(ii) 是从作为塑性变形特性的不可逆性（能量的耗散性）的事实出发，以及从物质的本构方程（原是热力学状态方程之一）的事实出发，想从热力学方面根本上重新认识塑性本构方程的观点。这可以说是最普遍而又最根本的观点。当然，这是把 (i) 和 (iii)都包括进来的广泛的看法；但不可逆过程热力学本身未开拓的部分还很多，并且可以说理论上也才刚刚有点头绪。

(iii) 是大体上忽略热效应，在数学上探求应力σ（应力率$\dot{\sigma}$）和应变ε（应变率$\dot{\varepsilon}$）之间的关系的观点。大致可分为：(iii)-a，理性力学的观点；(iii)-b，以存在塑性势为前提的观点等。理性力学中的塑性理论的现状，同流体、弹性体、粘弹性体的其他理论相比，尚处于初始阶段。其理由是由于把弹性⇌塑性状态变化的**突变性**（catastrophe）加以数学化有困难，但一部分障碍正在突破中。或者相反，这个领域的研究者，把试图利用由σ，ε，$\dot{\varepsilon}$等是对称二阶张量而产生的数学上的限制，作为对本构方程的形式加以限制的观点，说成是理性力学的观点。因此，丝毫不以塑性势的存在作为前提，尽量避免假说，想在数学上逻辑范围内论述本构方程，这就是(iii)-a观点的基本态度。(iii)-b是至今最为流行的观点，看来这种状况今后一时还不会改变。

除了提出种种屈服条件外，也直接涉及了屈服面，所以有关各种载荷历史下的屈服面拓扑变化的实验研究也很兴旺，作为其数学化的屈服面理论也同样盛行。其中以屈服函数即塑性势的假设为前提。特别，屈服面理论一般采取实验先行、理论随后的形式，是以实验为中心的；理论也是从实验归纳的假说多于其逻辑性，实用的色彩浓。这些方面，每每成了持重视理论的其他观点的研究者批评的目标。当然，任何理论都必须有实验根据，为了理解屈服面变化这样的复杂现象，更多的实验当然是必要的。不过，笔者担心的是，虽然以上述三种观点去研究塑性理论并发展下去是可喜的，但屡见不鲜的情况却是，一个研究者钻进一个观点里，往往就看不见其他的观点，囿于自己的作法是最佳的，对其他的则不放在眼里。

今后日益要求于我们的，一方面要根据自己的观点推进研究，同时还要不断放眼兼顾其他观点的研究，用以修正和发展自己的研究。假如没有这种态度，势必加深混乱，就不可能使本领域的工作健康发展。当然，在议论百出之后，应当把综合的工作继续进行下去。

3、各种塑性理论

下面概述前节各种塑性理论的最近动向，并试图探索其未来发展的方针。

（i）建立在以Schmid定律为准则的晶体均匀滑移变形基础上的晶体塑性的分析，自从Taylor[2]，Bishop & Hill[3]以来，从单晶体的变形行为推进到多晶体的行为的形式，目前还在继续下去。根据Budiansky等[4]及Hill[5]的模型的提出，进一步增加其正确性；由Hutchinson[6]和大久保[7]等进展到体心立方晶体的分析；又由高桥[8]对更接近于实际的多晶体行为的数值计算法下了功夫。关根、上城等[9]详述了旋错（disclination）概念，假定了晶体旋转的抗力，指出即使对于刚性-完全塑性晶体，晶体旋转方向也能够唯一决定。但有关旋转抗力的说明，难说能使大家立即同意。如果考虑晶体的滑移硬化性，晶体旋转方向就可以唯一地决定。所以他们的方法似乎不是绝对的。而关根等的处理，相当于把晶体看成极性物质（polarmedium），有趣的是这点与Eringen等[10]有关该种物质的理性力学理论有联系。具有内部结构的物质（液晶、粉体或多晶体也可认为是这种物质的例子），本质上可认为是极性物质，严格说来应力是非对称的，而且可认为存在偶应力，因此理论复杂化了。就现状来说，这种理论尚未充分研究，其优点还不明显，所以作为非极性物质的处理法一直占绝对优势。对多晶体模型直接作数值计算的有Lin等[11]，Havner等[12]，神马等[13]，宫本等[14]，以及笔者[1,15-19]。

如果按与塑性理论的联系来考察上述有关晶体塑性的议论，则有Bishop & Hill，Budiansky等的面心立方晶体的屈服曲面的确定，高桥，Hutchinson，笔者[1,16,19]等的应力-应变关系的计算，关根等关于变形集合结构的计算，笔者关于塑性的一般讨论[17,18]，以及Havner等，Lin等和笔者[15,16]的后续屈服面的确定，等等。并且笔者[18,19]关于随着应变路径的急剧变化，应力-应变曲线发生奇异行为的认识，可以大致说明Lensky[20]实验以来似乎不能解释的那种现象。按照从多晶体模型的塑性的数值研究得到的印象，作为影响预变形后的塑性行为的因素，与其说是随着晶体旋转和晶粒形状变化的变化，不如说是内部应力（应变）分布的各向异性似乎在起更强的作用。关于r值的变化等等，似乎也有必要按这条路线重新考虑。

以上都以单晶体的硬化特性作为已知。在这方面残留的困难是将单晶体的行为多少简单化了。即便如此，作为结果得到的多晶体的行为，预期按其目的仍可成为半定量的、接近实际的东西，也有计算机实验的意义，用笔者采用的多晶体模型作塑性行为的数值研究，认为今后能在说明与预测实际材料的塑性行为方面有用。晶体塑性对塑性理论的积极的贡献，大概可以说只有通过这种模型才是可能的。

Kröner[21]和Nye[22]等改进了的连续分布位错理论，由Mura[23]等进一步发展，在种种已知的塑性问题上应用起来了，但现在却专门用来说明基本的现象，看来不是将来创立新的塑性理论的那种理论。或许能使用于塑性变形后残余应力分布的计算等方面[24]。原子尺度的位错，即作为金属物性理论之一的位错模型，主要在断裂理论和加工硬化理论[25]方面使用起来了。不过，这距离可以考虑复合载荷和复杂应变历史的状况还相当远。也有推导基本屈服条件的尝试[26]，但不如说是特殊的情况。虽然这么讲，如果下面述及的Perzyna[27]，笔者[28]等的，用内部状态变数（internal state variables）表现塑性体的变形历史的尝试有所发展的话，那么，位错的物性理论的知识就变得必不可少了。物性理论和连续体力学的交叉点可认为就潜藏在这一类作法中，这一今后的动向是令人感兴趣的。

（ii）作为从不可逆过程热力学的观点展望塑性理论的，有Bakulenko[29]，Perzyna[27]，Kratochvil & Dillon[30]，Lubliner[31]，Rice[32]，笔者[28]，村上、大野[33]等的许多研究。其中多半用内部状态变数表现物质的变形历史，作为其变数能够考虑位错密度张量等。如果要从本构方程中消去这类内部变数，则本构方程（广义地说，是热力学状态变数间的关系式，即状态方程）就变成泛函表示。作为对对象物质的限制有：是单纯物质（simple materials——作为参与现在状态的量，不包含其2阶小量系数以上高阶项的物质）；是局部作用原理（对某点的状态，没有来自距该点任意近的点以外的点的作用）成立；等等，但是，大半实际物质，认为都表现出足够好的近似。也有理性连续体热力学[34]的发展，数学上严密的逻辑性当然应当展开，但如果只停留在已有的热力学或者直接修正的范围，而不提出任何新的假说的话，那就不能超出至今已知现象的数学理解的范围，新的塑性理论是想不出来的。

例如，对基于热力学第二定律的本构定律的限制条件的研究，也由Naghdi等[35]及其他人继续进行着，但第二定律本身只带来全局性的限制，所以仅从热力学不能决定本构方程。其中Rice的非弹性势存在的证明是有兴趣的，但有必要注意以包含内部状态变数形式表示的势。村上、大野的理论虽然不是把塑

性体作为对象，但可看作是早于他们提出的Lee的理论[30]以及其他理论的发展的改进，内容主要指出了应变率应该用Jaumann微分，这可以说是运动学上的新建议。笔者的理论[28]的新建议，在于引入非弹性位移速度梯度张量跟熵的内部生长速度直接结合这种假设。据此，作为例子可得到如下的速度类型的弹塑性本构方程：

$$\left.\begin{array}{l} D = D^{p} : , \overset{\circ}{\sigma} \\ D^{p} = L^{e} + \langle\phi\rangle \Phi_{0}{}^{p} \otimes (\partial \sigma \widehat{\psi}^{p}) \\ \langle\phi\rangle = \begin{cases} \phi (\phi > 0 \text{ 时}) \\ 0 (\phi \leqslant 0 \text{ 时}) \end{cases} \\ \phi = \operatorname{sign}(\overset{\circ}{\phi}), \overset{\circ}{\phi} = (\partial_{\sigma} \widehat{\psi}^{p}) : \overset{\circ}{\sigma} \\ \Phi^{p}{}_{0} = \Phi^{p}(1 - \sigma : \Phi^{p}), \Phi^{p} = \Phi^{p}(\sigma, \varepsilon^{p}) \end{array}\right\} \quad (1)$$

此处假设是等温变形，当设A是4阶张量、B是2阶张量时，：用分量标记表示〔$A : B$〕$_{ij} = A_{ijkl}B^{kl}$等，$\otimes$表示〔$A \otimes B$〕$_{ijklmn} = A_{ijkl} B_{mn}$等。$D^{e}$是等温弹性柔度，$\widehat{\phi}^{p}$是所谓屈服函数。又，$D$ = 伸长率（stretching），$\overset{\circ}{\sigma}$ = Cauchy应力σ的Jaumann微分，均以所考虑时刻作为参考构形（reference configuration）。

2阶张量Φ^{p}或$\Phi_{0}{}^{p}$是应力与塑性应变的函数，可以适当地予以确定，但根据跟以往的理论相比较来看，如果取$\Phi_{0}{}^{p} = h(\partial_{\sigma}\widehat{\phi}^{p})$，则与以往的增量理论有同样形式，如果取$\Phi_{0}{}^{p} = h(\partial_{\sigma}\widehat{\phi}^{p})$而$\widehat{\phi}^{p} \neq \widehat{\psi}^{p}$，则相当于把$\widehat{\phi}^{p}$作为塑性势，把$\widehat{\psi}^{p}$作为屈服函数，以不同的形式考虑二者的情况。可是，这些是$\Phi_{0}{}^{p}$的特殊形式，当前没有对$\Phi_{0}{}^{p}$的限制条件。

因而，在式（1）里，不把塑性势的存在作为前提，不假设σ和塑性应变增量的同轴性，作为1次速度类型的本构方程，可以说是最广泛的。并且这是由热力学上的考察所导致的这点上是有意义的。式（1）的逆表示，$\dot{\sigma} = C : \dot{\varepsilon}$（$C = (D^{p})^{-1}$，$\dot{\varepsilon} = D$），可看作Truesdell[37]的亚弹性本构方程向弹塑体的扩展，虽然在C的内容上有显著的不同，但同样形式的本构方程在弹塑性数值解的分析上已常常使用[38]。

除式（1）外，在建立在热力学观点上的理论中，成为问题的是内部状态变数的具体化。如前所述那样的物性理论的考察在此大概是必要的。最近，立石等[39]在论述人体等的骨骼损伤时，给出有关内部状态变数的更具体的处理。不过，如已述那样，如果采用泛函表示，那种考察就不需要了，但又要回到泛函的确定这样的老问题上来了。

（iii）以往的（宏观的）塑性理论，大部分可归入此范畴。理性力学领域内关于塑性的理论，至今比较少。其中，德冈[40]从亚弹性本构方程

$$\overset{\circ}{T} = H(T) : D \quad (2)$$

出发，首先根据Wang的各向同性函数理论[41]，把它分解为Cauchy应力T和伸长率D的不变量以及基本积。然后，把T和D用6维矢量表示，成为

$$\overset{\circ}{\widetilde{T}} = \overline{H}(T)\widetilde{D} \quad (3)$$

的形式，有

$$\det|\overline{H}(T)| = 0 \quad (4)$$

作为所考察物质的破坏条件。此条件也能理解为，如果是脆性材料，即为断裂条件，但一般看作是屈服条件。这或许是一个“假说”，但是是对有限的$\overset{\circ}{T}$而言，D变成不确定的条件，T和D必然是2阶对称张量，如果假设本来就有不能持续该状态（弹性状态）的情况，那就可以理解为式（4）成立。在此意义上，这可以说是本构不稳定条件。在直到现在为止的屈服条件中，可认为是最理性地导出的条件。式（4）可分解为垂直形和剪切形两个条件，分别表示变成Mises条件及Tresca条件。

此后，德冈[42]把同样的想法扩展到H（T）包含内部状态变数的情况，就随动硬化材料的行为作了论述。可是，现阶段，还没有进行到以前不知道的屈服条件的提出。笔者[43]也从式（1）出发，根据与德冈同样的想法，作为σ和ε的不变量及基本积的函数，以极为一般的形式给出了变形后屈服条件所能采取的形式。指出了其中也能包括著名的吉村的公式（能一定程度表示各向异性与变形历史的依赖关系），还能包括含有Tresca形屈服条件的中心移动、扩大的表达式，等等。这个一般的后续屈服条件，能够表示以前实验得知的屈服面的复杂变化，在此意义上成为新提出的屈服条件。

Ilyushin的一般塑性理论[44]，以其井井有条的逻辑性为人们所熟知。而其最大的特征正在于，想要用5维应变偏量矢量空间中的应变轨迹（trajectory）的形状和矢量长度来获得应变历史的影响。最近，Valanis也给出了类似于此的想法[45]，但系统性差。改进了Drucker塑性规律[46]的Ilyushin塑性假说也为人们所熟知。并且，他的理论在大曲率轨迹中的“迟滞规律”[20]方面有特点，那就是想把应变轨迹产生急剧变化时，应力和应变增量矢量的共轴性不成立，应力矢量发生迟滞现象这样的实验事实公式化。也就是说，他的理论突破了作为以前势理论的大前提的“应力和应变增量的同轴性”的假设，可以说更接近于实验事实。以后，大桥等[47-49]指出

他的理论仅仅注重应变轨迹的形状和矢量长度，忽略了对原来的张量性中第1和第3不变量的照顾，精力充沛地尝试着改进Ilyushin理论。大桥等在多次进行精密控制的圆筒试片的复合加载试验中，特别对于由2直线构成的应变轨迹作了详细研究。并且成功地把折点刚过后的变形行为的异常变化现象（以前的增量理论不可理解的）精确地公式化。首先，探索在两个2阶对称张量间普遍成立的关系式，把该关系式应用到应力偏量张量D_σ和应变偏量增量张量D_{d_e}（包括弹性-塑性两种成分），得出下式：

$$\frac{D_\sigma}{\zeta_\sigma}=\frac{1}{\sin 3\alpha_{d_e}}\left[\left\{\sin(2\alpha_{d_e}+\alpha_\sigma)\ \frac{LD_{d_e}L^{-1}}{\zeta_{d_e}}+\sqrt{3}\sin(\alpha_{d_e}-\alpha_\sigma)\left(\frac{LD^2_{d_e}L^{-1}}{\zeta^2_{d_e}}\right)-\sqrt{\frac{2}{3}}G_1\right\}\right] \tag{5}$$

这里，$\zeta^2=\mathrm{tr}\ (D^2)/2=I_2(D)=$（张量$D$的第2不变量），$\cos 3\alpha=3\sqrt{3}I_3(D)/2\zeta^3$），$I_3(D)=\mathrm{tr}(D^3)/3=$（张量$D$的第3不变量），$G_1=\sqrt{2/3}\delta_{ij}e_ie_j$，$e_i$等于规定$D_\sigma$的主轴的正规正交基矢。另外，如果把规定$D_{d_e}$的主轴的那些正规正交基矢作为$d_i$，正规正交张量$L$就给出$e_i=Ld_i$的关系式，即$L$是$D_\sigma$主轴和$D_{d_e}$主轴间的正交变换张量。式（5）不同于以前的增量理论，它包含D_{d_e}的2次项，且不以D_σ和D_{d_e}的同轴性为前提（一般地说，$L\neq I$，$I=$ 2阶单位张量）。然后，通过α_{d_e}及α_σ项计入D_σ及D_{d_e}的第3不变量的影响。在$L=I$的情况下，只要$\alpha_{d_e}=\alpha_\sigma$时，显然就变成对应于以前的增量理论的公式。

式（5）包含着依赖于历史的标量函数α_{d_e}（或α_σ）及张量函数L，如能将这些函数对任意历史公式化，就认为是能得到完全的D_σ对D_{d_e}关系的观点。虽然关于二直线轨迹，在其折点刚过后的行为的表现方面成功了，但是，那样的普遍的公式化是否可能，还是一个疑问。如果仅仅依据他们的理论，则在应变轨迹刚急剧变化之后，式（5）的2次项起支配作用，此后它急剧减小，不久就只有第1项具有支配性。这个结果值得重视。在他们的理论中也应该大书一笔的是，关于屈服面（或屈服条件）全然不用顾虑，弹性-塑性状态变化对于理论也无任何影响。这样的观点还是可能的，这一事实应铭刻在心。

他们的理论，乍一看感到复杂，但是，正如他们也主张的那样，只用张量代数演算就足够了。只是平时我们不习惯使用。还有，对他们的实验只限于低应变区域这一点提出了批评，从理论的性质来判断，那大概不是不成问题的。然而，D_σ及D_{d_e}与什么应力或应变联系，什么记载都没有，似乎以微小变形作前提，多少可能有些问题。再有，对弹塑性状态与应力及应变增量的关系这件事情本身也有商榷的余地。应力偏量增量D_σ和D_{d_e}的关系重新取定时，相当于式（5）的式子如何改变，此时应力项D_σ怎样进入式子当中，应该进行探讨。在这种情况下，可以认为已述的各向同性函数理论成为有力的武器。

与上面理性力学的观点相对比，以塑性势的存在作为前提的原有的势理论，即使到现在依然是占支配地位。最大的原因似乎在于它不需要新的数学知识，容易理解，且便于使用。可是，考虑屈服面，假设屈服函数即塑性势，导出应力-应变增量关系等这些观点，从式（5）看得很清楚，在其根本方面已作了近似，这不应该忘掉。这就是说，在具有过于急剧的应变轨迹变化的情况下要记住，这种观点是情况不妙的。

即使采取不假设屈服函数即塑性势，把双方作为分别的函数来考虑的观点，只要不用象笔者式（1）那样的作法，情况仍是一样的。反之，在没有过急的应变轨迹变化的情况下，没有必要特意考虑到D_{d_e}的2次项，设$L\approx I$，则按势理论就行。因此，希望今后能把势理论的有效范围搞清楚。

关于屈服面随变形的变化，到现在提出了很多表达式，各向同性硬化律、随动硬化律[50]及其不同形式，以及吉村公式[51]等，是古典的表达式。这些可以说是把实际屈服面的形状变化，一定程度地加以理想化（简单化）了的。再有，关于屈服面的广泛的展望，可参考Michno & Findely[52]及池上[53]等。

白鸟等[54-56]就圆筒试片作了跟大桥等同样的大量试验，根据势理论进行了数据的整理。他们提出的后续势函数，对于初期各向同性材料来说为下列公式：

$$\left.\begin{aligned} f&=\frac{(\bar{\sigma}_1'-\sigma_*)^2}{(\sigma_Y-\zeta\sigma_*)^2}+\frac{\sum_{i=2}^{5}(\bar{\sigma}_i'^2)}{(\sigma_F-\sigma_C)^2}-1\\ \zeta&=\frac{(\sigma_F-\sigma_Y-\sigma_B+2\sigma_*)\ (\bar{\sigma}_1'-\sigma_Y)}{\sigma_*(\sigma_F+\sigma_Y-\sigma_B}+1\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

此外，$\bar{\sigma}_i$，$\bar{\sigma}_i'$等于5维应力偏量空间及其移动空间的坐标分量，σ_*，σ_Y，σ_F，σ_B，σ_C是表征屈服曲面形状变化的各常数。还有，作为应力空间，使用了给予Mises公式以球面的Ilyushin应力偏量空间（平面应力）。式（6）从某种意义上说是实验式，但由此可认为能很好地表现与预载荷相反方向的等应变面偏平

化现象。如果把这作为塑性势来用，也显示能很好表现反复载荷下的“机械棘轮”现象。

当然，已给出过即使载荷方向急剧变化的情况下势理论也能有效使用的一个例子，与大桥等的理论的调和性不明确，但在轨迹刚急变之后，随着载荷的完全卸除出现纯弹性状态，大概可认为是由于在最成问题的那个时刻，能够顺利地排除材料的非线性。

Mróz[57]先于白鸟等，把各向同性硬化模型与随动硬化模型结合在一起，导入“加工硬化系数场”，试图对以前取决于单一系数的处理进行改进。这可看作是假说，但是，根据白鸟等[56]对于复杂的应变轨迹不一定给出满意的结果。以理想化的假说作为基础，是不得已的结果。在这种假说上建议假说的做法，其限度是可以想像得出来的，相比之下，白鸟等人的实验式的手法是高明的。

对于初期各向同性材料及各向异性材料，户泽等[58,59]同样根据实验结果提出的屈服条件分别如下：

$$\left.\begin{aligned}\|\sigma\| &= A + B\cos\omega + C\cos^2\omega \\ \|\sigma\| &= \sigma_{\circ}\left(A' + B'\cos\omega + C'\cos^2\omega\right)\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

式中A，B，—C′是应变量的函数，ω是预载荷方向与所考虑应力点的形成角，σ。是初期屈服应力，$\|\sigma\|$是应力矢量长度$=\sqrt{3}I_2^{1/2}$（I_2是σ的第2不变量）。又，作为应力空间，考虑在基准平面上（σ_X，σ_Y，σ_Z），在直角方向取$\sqrt{3}\tau_{XY}$的独特的空间[60]，Mises公式仍以球面来表示。还有，假定轧制板作为对象材料，取（X，Y）面同板面一致。

他们对用粘接材料粘接的薄板，用2轴压缩实验研究了对任意应力状态的响应。试验应变量约等于塑性加工中相应的那样高，在这点上同其他的实验研究划了一道界限。但是，大部分是比例载荷试验，对其他复杂应变轨迹，式（7）是否有效或者那种场合下如何处理，这在现阶段还不明确。式（7）作为塑性势相当于取

$f=\|\sigma\|-(B\cos\omega+C\cos^2\omega)$，或$f=\|\sigma\|-\sigma_{\circ}(A'+B'\cos\omega+C'\cos^2\omega)$，因cosω和σ。是应力的函数，所以在变形的数值分析等等中，在计入的时候必须考虑这一情况，要注意并不是象外表那样简单的屈服函数。再有，他们认为对于很多金属，等应变屈服曲线在小应变值的范围内是Tresca形，应变值一变大就成为Mises形，这成为初期各向同性材料的特征[60]，笔者[16]用前述的多晶体数值分析也获得同样的结果，这很有意思。

Hill[61]指出，作为金属多晶材料的特征，在载荷点屈服面有可能产生尖点，将古典的Batdorf & Budiansky[62]滑移理论精确化了。实验上严密地调查有无尖点形成，认为是极其困难的。如果尖点形成是事实的话，就迫切需要重新探讨随附于势理论的“屈服函数梯度唯一性”的假定，或者对塑性应变增量屈服面的“垂直性定律”（normality rule）。Sewell[63]和Rice等[64]作了这些工作，特别是Rice指出，如果以尖点形成作为前提，则根据过去的塑性不稳定性理论认为应力比在0.5以上时不会产生的局部颈缩，这时却能产生，并且实验上看到了这种局部颈缩，因此从反面得到了尖点形成的旁证。但是，关于局部颈缩的生成，Marciniak[65]及林[66]也作过考察，结论还是不肯定的。

不管怎样，纵然尖点形成，如果不怎么明显，则在该部分把屈服面用光滑曲面来近似，就可以应用垂直定律。以前认为在实验上没有尖点形成，取得成功的议论之多，或许是研究工作者不自觉地作了那样的近似。在笔者的式（1）中的$\Phi_{\circ}$，也包含着那种近似的可能性[26]。另外，在多晶模型数值分析方面，重视强调尖点形成的形式[11,12,16]，但对采用的晶粒的数目有限制，所以实际材料的行为如果是那样也不能立即断定。

从薄板压制成形的必要性出发，基于Hill的2次屈服函数的正交各向异性塑性理论[67]仍继续使用着。它除去不包含Bouschinger效应及变形历史影响外，还有种种不完备的地方，所以其有效性受到相当大的限制，但由于简明，它们的短处往往被忽视了。根据利用它的领域的特点，如果表现薄板主要特性的因子被包含在理论中的话，则只要有其使用目的的大半能完成的实况，那样的态度也大概有继续保持存在的理由。在2次屈服函数的范围中，也有太田[68]、Chakrabarty[69]等作的改进，但不是在上述的意义下超出Hill的原始公式的，则实际上不可能顾及。

笔者[70]站在上述现实主义立场，研究讨论了4次屈服函数的有效性，认为有相当多的优点。指出了轧制板的正交各向异性，最低必须用4次函数（多项式的情况），才能完满地表现出来，特别在轴对称各向异性假定条件下，除以前的r值（垂直异向性）外，还有同一应变水准的面内等2轴的和面内单轴的屈服应力之比$\bar{X}$值参加进来，从吉田[71]所倡导的X值取近于$\bar{X}$值之值，明确了X值成为成形因子的理由（因为先有了X值的提出，造成了追认它的形式，但本来笔者的论述和吉田的倡导，二者是完全独立的）。

除上述之外，作为塑性理论，注意还有基于最大剪切应力学说的齐藤等[72,73]假说的理论。作为假

说的屈服条件，还有立石、宫本[74]的能量基准公式。

最后附带说一下在整理历史的复杂性影响中所必需的、有关表现应力和应变大小的尺度。以前惯用所谓“等效应力”及“等效应变”的说法，本意想是用了它们的应力-应变曲线，就成为同应力状态和历史无关的单一曲线，是这样的标量值之意。但那样的标量值应该存在的根本理由并不存在。

作为在应力空间中描述屈服面的基准的应变的大小，采用从其第2不变量J_2而来的$\|\varepsilon\|$（$=(2/\sqrt{3})J_2^{1/2}$）的很多，还有，应力-应变曲线被作为$\|\sigma\|$对$\|\varepsilon\|$的关系曲线给出，除Mises材料以外不能统一成单一曲线，把这些情况不看成问题，其原因就在于此。从$\|\sigma\|$和$\|\varepsilon\|$的定义来看，把这些看作张量σ及ε的**大小**的度量的看法是很自然的。然而，在这种情况下，把它们叫做“等效……”，恐怕会产生误解，所以称为“有效……”（effective）怎么样？现已有人这样称呼，但是希望统一起来。顺便提一下，在也包含大变形的时候，应该明确$\dot{\sigma}$，$\dot{\varepsilon}$（或$\overset{\circ}{\sigma}$，$\dot{\varepsilon}$）的定义。因为σ和ε具有适当的关系，所以所谓双方的选择是自由的，这种观点今后也必须改变。关于其适当的关系，Hill[75]等有过详述。

4、结语

关于塑性理论的未来，应设一节专门去谈。从上面的阐述想能看出笔者的见解，所以就此搁笔。引用论文尽量少，很可能有片面性。但是我想，大致的展望算完成了。尤其高兴的是我们日本研究工作者的活跃情况引人注目。上述内容若有不当之处，请批评指正。

参 考 文 献

〔1〕后藤：1975 JSME-ASME Appl. Mech. West. Conf.，(1975)，239.

〔2〕Taylor, G. I.: *J. Inst. Metals.*, 62 (1938)，307.

〔3〕Bishop, J. F. W. & Hill, R.: *Phil. Mag.*, 42 (1951)，414, 1298.

〔4〕Budiansky, B. & Wu, T. T.: Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 2 (1962)，1175。

〔5〕Hill, R.: *J. Mech. Phys. Solids*, 13 (1965)，89.

〔6〕Hutchinson, J. W.: loc. cit., 12 (1964), 25.

〔7〕大久保：塑性と加工，9—93（1968），681.

〔8〕高桥：日本机械学会论文集，42—354(1976)，396.

〔9〕关根、上城、吉村、井上：日本金属学会志，39（1975），1045；40（1976），457.

〔10〕Eringen, A. C.: Continuum Physics Ⅳ，(1976)，1, Academic Press.

〔11〕Lin, T. H.: *Advances in Appl. Mech.*, 11 (1971)，225.

〔12〕Havner, K. S. & Varadarajan, R.: *Int. J. Solids Structures*, 9 (1973)，379.

〔13〕神马：日本机械学会志，75—639（1972），602.

〔14〕宫本、石岛、三好：同上，75—639 (1972)，575.

〔15〕后藤：日本机械学会论文集，43—374(1977)，（待发表）.

〔16〕后藤：*Int. J. Num. Meth. Engng.*, 11 (1977)，（印刷中）.

〔17〕后藤：日本机械学会论文集，42—362(1976)，3117.

〔18〕后藤：岐阜大学工学部研究报告，25（1975），34.

〔19〕后藤：（待发表）.

〔20〕Lensky, V. S.: Plasticity (eds. Lee, E. H. & Symonds, P. S.)，(1960)，259, Pergamon Press.

〔21〕Kröner, E.: Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, (1958)，Springer-Verlag.

〔22〕Nye, J. F.: *Acta Met.*, 1(1953)，153.

〔23〕Mura, T.: Mathematical Theory of Dislocations, (1969)，25, A. S. M. E.

〔24〕例えば，川井、神马、永浜：昭52春塑加讲论，(1977)，165.

〔25〕例えば，长谷川、辛岛（解说）：日本金属学会会报，9—1（1970），29.

〔26〕Gittus, J. H.: *Phil. Mag.*, 25 (1972)，1233.

〔27〕Perzyna, P.: *Advances in Appl. Mech.*, 11 (1971)，313.

〔28〕后藤：*Int. J. Non-linear Mech.*, 12 (1977)，(Part Ⅰ & Ⅱ)，113, 175.

〔29〕Baknlenko, A. A.; （大桥の解说）；塑

性と加工，13—134（1972），212.
〔30〕Kratochvil, J. & Dillon, O. W.: *J. Appl. Phys.*, 40（1969），3207.
〔31〕Lubliner, J.: *Int. J. Non-linear Mech.*, 7（1972），237.
〔32〕Rice, J. R.: *J. Mech. Phys. Solids*, 19（1971），433.
〔33〕村上、大野：日本机械学会论文集，43(1977)，1220.
〔34〕Truesdell, C.: Rational Thermodynamics,（1969），McGraw-Hill.
〔35〕Naghdi, P. M. & Trapp, J. A.: *Q.J. Mech. Appl. Math.*, 28（1975），25.
〔36〕Lee, E. H.: *J. Appl. Mech.*, 36(1969), 1.
〔37〕Truesdell, C.: *J. Rat. Mech. Anal.*, 4（1955），83, 1019.
〔38〕例えば，Hibbitt, H. D., Marcal, P. V. & Rice, J. R.: *Int. J. Solids Structures*, 6（1970），1069.
〔39〕立石、宫本：日本械学会论文集，42—354（1976），423.
〔40〕德冈：Symposium on Foundations of Plasticity,（ed. Sawczuk, A.),(1973), 1, Noordhoff Int. Pub.
〔41〕Wang, C. C.: *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 36（1970）166, 198.
〔42〕德冈：材料，26—283（1977），334, 349.
〔43〕后藤：日本机械学会讲演论文集，№760—13（1976），61.
〔44〕Ilyushin, A. A.;（大桥の解说）：机械の研究，23（1971），343, 479, 611.
〔45〕Valanis, K. C.: *Archives Mech.*, 23（1971），517, 535.
〔46〕Drucker, D. C.: *J. Appl. Mech.*, 26（1959），101.
〔47〕大桥、德田：*J. Mech. Phys. Solids*, 21（1973），241.
〔48〕大桥、川岛、横地：loc. cit., 23（1975），227.
〔49〕大桥、德田、山下：loc. cit., 23（1975），295.
〔50〕Prager, W.: *Trans. ASME*, E—78（1956），493.
〔51〕吉村：塑性力学，（1957)，138，共立出版.
〔52〕Michno, M. J., Jr. & Findley, W. N.: *Int. J. Non-linear Mech.*, 11（1976），59.
〔53〕池上：材料，24（1975），491, 709.
〔54〕白鸟、池上、金子：日本机械学会论文集，39—318（1973），458.
〔55〕白鸟、池上、金子：*J. Mech. Phys. Solids*, 23（1975），325.
〔56〕吉田、池上、白鸟：塑性と加工，18—198（1977），525.
〔57〕Mróz, Z.: *J. Mech. Phys. Solids*, 15（1967），163.
〔58〕户泽：日本金属学会会报，15—10(1976)，607.
〔59〕白井、户泽：塑性と加工，16—175（1975），645.
〔60〕户泽、白井：同上，16—174（1975），550.
〔61〕Hill, R.: *J. Mech. Phys. Solids*, 15（1967），79.
〔62〕Batdorf, S. B. & Budiansky, B.: *J. Appl. Mech.*, 21（1954），323.
〔63〕Sewell, M. J.: *J. Mech. Phys. Solids*, 22（1974），469.
〔64〕Stören, S. & Rice, J. R.: loc. cit., 23（1975），421.
〔65〕Marciniak, Z. & Kuczynski, K.: *Int. J. Mech. Sci.*, 9（1976），609.
〔66〕林：塑性と加工，10（1969），917.
〔67〕Hill, R.: The Mathematical Theory of Plasticity,（1950），317, Oxford.
〔68〕太田、进藤、福冈：Proc. 9th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.,（1959），117.
〔69〕Chakrabarty, J.: *Int. J. Mech. Sci.*, 12（1970），169.
〔70〕后藤：loc. cit., 19（1977），（Ⅰ&Ⅱ），（印刷中）.
〔71〕吉田：理化学研究所报告，45—6(1969)，157.
〔72〕齐藤：日本机械学会论文集，22(1956)，821.
〔73〕齐藤、井坦、杉本：同上，37（1971），883.
〔74〕立石、宫本：同上，40（1974），3005；41（1975），387.
〔75〕Hill, R.: *J. Mech. Phys. Solids*, 16（1968），229.

译自：后藤学，塑性理论の动向と将来，塑性と加工，18, 200（1977），664—670.

（王为良译[1] 王礼立、董务民校）

1）张双寅同志对译文提了不少修改意见，特致谢意。