

# 具有圆锥型内外壁的 叶栅内三元流动近似直接解\*

中国科学院力学研究所

刘殿魁

**摘要** 在作了回转流面为圆锥面的假定以后, 得出了十分简洁的运动方程的形式, 其中不包含沿流线的导数项, 与目前常用的 $S_1$ 、 $S_2$ 流面运动方程比较, 不仅使计算大大简化, 而且在计算时, 可同时计及气流径向, 及回转方向的变化, 使我们近似地得出了三元流场的直接解。

由于忽略了叶栅内流线的径向波动, 这只能是一种近似解法, 特别适合于轴流式叶栅机械的叶栅内部计算。

## 符号表

$r, \theta(\varphi), z$	叶栅机械常用的绝对(相对)圆柱坐标系(图2)
$n$ 及 $n'$	分别为子午面和圆锥面上的流线法向座标
$\alpha, l$	子午面上的极座标(图1)
$V(w)$	气流绝对(相对)速度
$\rho$	密度
$T$	温度
$p$	压力
$h$	焓
$s$	熵
$k$	等熵指数
$h_0$	滞止焓
$h_R$	转子滞止焓
$\omega$	叶轮旋转角速度
$t$	时间
$m(l)$	流线(流线在子午面内投影)
$G_0$	流量
$N$	叶片数目
$\beta$	圆锥流面上气流方向( $m$ )与子午面的夹角
$\rho_k$	圆锥流面上流线的曲率半径

## 前 言

叶轮机械内的三元流动, 目前用得最多的是分解为 $S_1$ 、 $S_2$ 两类流面上的二元流动来求解<sup>[1]</sup>。作 $S_1$ 流面计算时, 要给定 $r$ 向流片厚度分布, 并假定气体参量沿 $r$ 向不变化, 以求出气流参量的周向变化。作 $S_2$ 流面计算时, 则要假定 $\varphi$ 向的流片厚度分布, 并假定气流参量 $\varphi$ 向不变化, 以求出气流参量的 $r$ 向变化。由于上述互相矛盾的假定, 要把 $S_1$ 、 $S_2$ 两类流面解综合一起计算三元流场, 只有尽量加密流道的分割流线。而流线的位置又是预先不知道的, 要经过反复的迭代确定。特别是在计算 $S_1$ 流面上的流线位置时要求照顾到 $S_2$ 流面上的流线位置。反过来说也一样。这在分别单独地计算 $S_1$ 和 $S_2$ 流面时是很难办到的。再加上两类流面上的速度梯度方程都是很复杂的非线性方程, 其中包含有沿流线的导数项, 若用流线曲率法, 要求反复地迭代 $S_1$ 、 $S_2$ 两族流面上的一系列流线位置来求出三元流场, 显然是极为浩繁的计算<sup>[2]</sup>。问题的真正解决, 目前还是作不到的。

鉴于加工上的要求, 轴流式叶轮机械的一个或几个级都作成圆锥形的内外壁壳, 我们提出一种工程上适用的近似解法, 工作量与解一个 $S_1$ 流面差不多, 但能近似地得出三元流场的分布。其特点是:

\* 1978年2月收到。

1. 假定 $S_1$ 流面是锥面。这一假定使我们自然地满足了圆锥形内外壁的边界条件。忽略了内部的流线波动, 虽然使 $S_2$ 流面上的运动方程不够严格, 但却收到了大为简化, 甚至可以计算三元流场的好处。

(这种简化是不乏先例的, 如定常流动、等熵流动等假定, 再如简化径向平衡方程中假定 $\frac{\partial V_r}{\partial z} = 0$ 等等都是类似的。)

2. 采用子午面上的极坐标 $l, \alpha$ , 或相当于采用流线的法向座标 $n$ 。在圆锥流面上也采用流线的法向座标 $n'$ , 来推导速度梯度方程。

### § 1. 速度梯度方程的导出

#### (一) 子午面上沿法线的运动方程

(1) 静止叶栅:

热力学第一定律表示为

$$-\frac{\nabla p}{\rho} = T \nabla s - \nabla h = T \nabla s - \nabla \left( h_0 - \frac{V^2}{2} \right)$$

$$-\frac{\nabla p}{\rho} = V \nabla V + T \nabla s - \nabla h_0 \quad (1)$$

(1) 式在 $n$ 方向的投影式为

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = V \frac{\partial V}{\partial n} + T \frac{\partial s}{\partial n} - \frac{\partial h_0}{\partial n} \quad (2)$$

对无粘性、可压缩流体, 牛顿第二定律写为

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} \quad (3)$$

(3) 式在 $r, \theta, z$ 圆柱坐标系的分量式为

$$\frac{dV_r}{dt} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (4)$$

$$\frac{dV_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (5)$$

由于假定了圆锥流面, (参看图1)

$$\frac{dV_r}{dt} = \frac{d(V_L \sin \alpha)}{dt} = \sin \alpha \frac{dV_L}{dt} \quad (6)$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{d(V_L \cos \alpha)}{dt} = \cos \alpha \frac{dV_L}{dt} \quad (6)$$

$$\frac{\partial A}{\partial n} = \cos \alpha \frac{\partial A}{\partial r} - \sin \alpha \frac{\partial A}{\partial z} \quad (7)$$

用 $\cos \alpha$ 乘(4)式减去 $\sin \alpha$ 乘(5)式, 把(6)

式代入得

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = -\cos \alpha \frac{V_L^2}{r} \quad (8)$$

由(2)、(8)得出

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{V \sin^2 \beta \cos \alpha}{r} + \frac{1}{V} \left( \frac{\partial h_0}{\partial n} - T \frac{\partial s}{\partial n} \right) \quad (9)$$

按图1中的几何关系:

$$r = r_0 + l \sin \alpha \quad dn = l d\alpha$$

$$\frac{1}{l} \frac{\partial V}{\partial \alpha} = -\frac{V \sin^2 \beta \cos \alpha}{r_0 + l \sin \alpha} + \frac{1}{V} \left( \frac{\partial h_0}{\partial n} - T \frac{\partial s}{\partial n} \right) \quad (9)'$$

实际计算时, 经常取 $\frac{\partial s}{\partial n} = 0$ ,  $\frac{\partial h_0}{\partial n}$ 由进口来

流决定。当均匀来流时,  $\frac{\partial h_0}{\partial n} = 0$ 。

(2) 等速旋转叶栅:

定义滞止转子焓为

$$h_R = h + \frac{w^2}{2} - \frac{(\omega r)^2}{2} = h_0 - V_\theta \omega r$$

$$\nabla h_R = \nabla h + w \nabla w - \omega^2 r \nabla r \quad (10)$$

由于  $T \nabla s = \nabla h - \frac{\nabla p}{\rho}$

$$w \nabla w = -\frac{\nabla p}{\rho} + \omega^2 r \nabla r + \nabla h_R - T \nabla s \quad (11)$$

由  $\vec{V} = \vec{w} + \vec{\omega} \times \vec{r}$  代入(3), 其分量式为

$$\frac{dw_r}{dt} - \frac{(w_\theta + \omega r)^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (12)$$

$$\frac{dw_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{同样} \quad \frac{dw_r}{dt} &= \sin \alpha \frac{dw_L}{dt} \\ \frac{dw_z}{dt} &= \cos \alpha \frac{dw_L}{dt} \end{aligned} \right\} (6)'$$

由(12)、(13)、代入(7), 使用(6)'式后得

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \cos \alpha \frac{(w_\theta + \omega r)^2}{r} \quad (14)$$

\*其中A为流面上的任何物理参量。

(11) 式的n向投影式与(14)联立,得

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{1}{w} \left[ -\cos\alpha \frac{w \cdot w^2}{r} - 2\omega \cos\alpha \cdot w \right] + \frac{1}{w} \left( \frac{\partial h_R}{\partial n} - T \frac{\partial s}{\partial n} \right) \quad (15)$$

(15) 式中最后一项常常是略去不计的,把图1中的几何关系代入后可写成

$$\frac{1}{l} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = -\cos\alpha \frac{w \sin^2 \beta}{r_0 + l \sin\alpha} - 2\omega \cos\alpha \sin\beta \quad (15)'$$

(二) 圆锥流面上的运动方程(回转方向)

(1) 静止叶栅:

由(8)式的θ向分方程

$$\frac{V_\theta V_r}{r} + \frac{dV_\theta}{dt} = -\frac{1}{r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (16)$$

在假定了  $T \frac{\partial s}{\partial \theta} - \frac{\partial h_0}{\partial \theta} = 0$  后,利用(1)式的

θ向投影后,与(16)式联立得出

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \cos\beta \frac{dV_s}{dl} + \frac{V \sin 2\beta \sin\alpha}{2r} \quad (17)$$

参看图2,流线具有几何关系

$$rd\theta = \tan\beta \cdot dl$$

$$\therefore \frac{d}{dl} (\quad) = \frac{\partial}{\partial l} (\quad) + \frac{\tan\beta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\quad) \quad (18)$$

利用(18)式可以把(17)式改写成

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{\cos\beta} \frac{\partial V_s}{\partial l} + \frac{V}{r} \tan\beta \left( \sin\alpha + \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right) \quad (17)'$$

(2) 等速旋转叶栅:

由  $V_\theta = w_\varphi + \omega r$   $w_r = V_r$  代入(16)

$$\frac{(w_\varphi + \omega r)w_r}{r} + \frac{d(w_\varphi + \omega r)}{dt} = -\frac{1}{r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$$

利用(11)式的φ向分方程消去  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$  即得

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = & \cos\beta \frac{dw_\varphi}{dl} + \frac{w_\varphi}{r} \cos\beta \sin\alpha \\ & + 2\omega \sin\alpha \cos\beta + \frac{1}{r} \frac{1}{w} \left( \frac{\partial h_R}{\partial \varphi} \right. \\ & \left. - T \frac{\partial s}{\partial \varphi} \right) \quad (19) \end{aligned}$$

同样可利用(18)式(其中θ改为φ),把(19)式改写为(已命(19)式最后一项为零)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = & \cos\beta \frac{\partial w_\varphi}{\partial l} + \frac{w_\varphi}{r} \tan\beta \left( \sin\alpha \right. \\ & \left. + \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \right) + 2\omega \sin\alpha \cos\beta \quad (19)' \end{aligned}$$

(三) 圆锥流面上的运动方程(法线方向)

对有些叶型(例如双圆弧叶型),假定法线n'为与叶型凸、凹表面正交的圆弧,则速度梯度沿n'的变化极易计算。我们使用n'方向的方程代替(二)

中的(17)、(19)式,可消去其中的  $\frac{d}{dl} (\quad)$  项。

参看图2和图4,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n'} = & -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \cos\beta + \frac{p}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} \sin\beta \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial n'} = & -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \cos\beta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \sin\alpha \sin\beta \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \cos\alpha \sin\beta \quad (20) \end{aligned}$$

还有几何关系  $\rho_\kappa d\beta = V dt$  (21)

(20)式在代入了(4)、(5)、(16)式后,并使用(6)及(21)可得到

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n'} = V^2 \left( \frac{\sin\beta \sin\alpha}{r} + \frac{1}{\rho_\kappa} \right) \quad (22)$$

与(2)式(把其中n换为n')消去  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n'}$  项,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial n'} = & V \left( \frac{\sin\beta \sin\alpha}{r} + \frac{1}{\rho_\kappa} \right) \\ & + \frac{1}{V} \left( \frac{\partial h_0}{\partial n'} - T \frac{\partial s}{\partial n'} \right) \quad (23) \end{aligned}$$

对旋转叶栅可用完全类似的方法得出

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial n'} = & \frac{\sin 2\beta \cdot w_r}{r} + 2\omega \cos^2 \beta \sin\alpha \\ & + \sin\beta \sin\alpha \frac{(w_\varphi + \omega r)^2}{rw} + \frac{w}{\rho_\kappa} \\ & + \frac{1}{w} \left( \frac{\partial h_R}{\partial n'} - T \frac{\partial s}{\partial n'} \right) \quad (24) \end{aligned}$$

我们看到(23)、(24)式不再包含  $\frac{d}{dl}$  项。其

中的流线曲率项 $1/\rho_n$ ，我们假定其沿 $n'$ 为线性分布（参看图4）

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{\rho_{凸}} + \frac{n'}{n'_{AB}} \left( \frac{1}{\rho_{凹}} - \frac{1}{\rho_{凸}} \right) \quad (25)$$

对一般任意的叶型，我们也可以用作图的办法求出 $n'$ ，只要认为(25)式成立，则也可以采用(23)、(24)式计算。当然由于(25)式是一种近似的假定，这也是一种近似解。

综观(9)、(15)、(23)、(24)，它们都不包含沿流线的导数项，比起一般的 $S_1$ 、 $S_2$ 流面运动方程〔3〕，〔4〕，〔5〕，都大为简化，可以很方便地作数字积分。但应强调指出，这是付出了代价的，即忽略了内部流线因流型扭曲造成的径向波动。它的好处不只在消去 $\frac{d}{dl}$ 项使计算简化，还使我们只作一个类似于 $S_1$ 流面的计算，即得出三元流场，在积分流量时，可以同时考虑气流速度，密度 $r$ 向和 $\varphi$ 向的变化，这是目前常用的孤立的 $S_2$ 或 $S_1$ 流面解作不到的。

下面以静止叶栅内部流动计算为例，概述一下求解过程。

## §2. 求解概述

除上节给出的速度梯度方程外，还需补充连续方程及等熵能量方程：

$$\int_0^{n_m} r \int_{\theta_{凹}}^{\theta_{凸}} V \cos \beta \cdot \rho d\theta dn = \frac{G_0}{N} \quad (26)$$

$$\text{或记为} \quad r_0 l \int_{\alpha_b}^{\alpha_a} \rho d\alpha - l^2 \int_{\alpha_a}^{\alpha_b} \int_{\theta_{凹}}^{\theta_{凸}}$$

$$\rho V \cos \beta d\theta d(\cos \alpha) = \frac{G_0}{N} \quad (26)'$$

注意这里的连续方程是对图3中，两个相邻叶片间通道的一个曲面5678写出的，它同时考虑了密流在 $n$ 和 $\theta$ 方向的不均匀性。

等熵的能量方程写为

$$\frac{k}{k-1} RT_0 = \frac{k}{k-1} \frac{\rho_{10}}{\rho_{10}^k} \rho^{k-1} + \frac{V^2}{2}$$

$$\text{或简记为} \quad a\rho^{k-1} + \frac{V^2}{2} = b \quad (a、b \text{ 为已知常数}) \quad (27)$$

若考虑因粘性损失造成的熵增使密度改变则可以下式代替(27)

$$\frac{\rho}{\rho_{10}} = \left( \frac{\frac{k}{k-1} RT_{10} - \frac{V^2}{2}}{\frac{k}{k-1} RT_{10}} \right)^{\frac{1}{k-1}} - \frac{\Delta s}{R} \quad (27)'$$

方程(23)、(26)和(27)包含三个未知数 $V$ 、 $\beta$ 及 $\rho$ （因作了锥面流面的假定， $\alpha$ 为 $r$ 、 $z$ 的已知函数），可以直接解出。在正问题中给定来流参数 $p_{10}$ 、 $T_{10}$ 、 $\rho_{10}$ ，流道和叶片的几何参数（即子午面型线 $\alpha_a$ 、 $\alpha_b$ 及叶型型线 $\theta_{凸}$ 、 $\theta_{凹}$ ），要求计算速度的分布。

第(1)种方法只计算一个圆锥面上的流动，沿叶高方向速度变化由(9)式定出。第(2)种方法则是只在一个选定的子午面上保证(9)式成立，以此为初值，求出一系列圆锥面上的流动，叠组成三元流场。后一算法要解一系列的圆锥流面，如用近似方程(25)和(23)代替(17)式，则其计算工作量也并不增加很多。下面简要说明一下计算步骤。

1. 初分流场。在 $\theta = \theta_0$ 的选定子午面上（图3中的1234平面）取 $l = l_1, l_2, l_3 \dots$ ；

$\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ 等一系列数值，得出子午面上的计算节点。

在 $\alpha = \alpha_0$ 的选定圆锥流面上（例如可选轮毂面）选定计算网格：

(a) 若用(17)式计算，则沿 $\theta$ 向积分，要按流线逐条积分，因此使用的是流线座标。

(b) 若用(17)'式计算则使用 $\theta = \theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots$ 等平面与圆锥面的交线座标。

(c) 若采用(25)、(23)式计算，使用法线座标 $n'$ 。对一般叶型，须先用图解方法确定座标。参看图4，作一系列流道的内切圆，并由两个切点构成与叶型凸、凹面正交的圆弧，此圆弧即假定为流线的法线 $n'$ 。对双圆弧叶型，则可用解析式计算 $n'$ 座标，见附录。

2. 计算初值的选取：

在子午面与圆锥面交线（图3中的12）上选取速度初值 $V_0(l)$

在 $\alpha = \alpha_0$ 圆锥面上，以解析式或函数表形式给出气流角的初值 $\beta_0(\alpha_0, \theta, l)$ 。作流线迭代，则相当于修改此函数。

3. 按1中的(a)~(c)的一种情况，先计算出 $\alpha = \alpha_0$ 流面上的 $V$ 分布。然后沿子午面上 $l = l_1, l_2, l_3 \dots$ 各圆弧 $\Delta \alpha_j = \alpha_j - \alpha_{j-1} \dots$ 对(9)式作数字积分，求出三元空间的速度分布。

4. 根据(27)式求出对应的 $\rho$ 之空间分布。

5. 使用 (26)' 式求出图 3 中曲面 5678 上的流量  $G$ , 与  $G_0/N$  比较, 据此修正初值  $V_0$ 。(1) —— 完成通常所谓的流量迭代。

6. 在  $\alpha = \alpha_0$  圆锥面上作流线校正:

依  $l = l_1, l_2, l_3 \dots$  各计算站上的  $G \sim \theta$  关系反插出流线的新位置, 于是得到校正后的气流角  $\beta'(\alpha, \theta, l)$ 。(如果作一系列的圆锥面流线校正, 可得出  $\beta(\alpha, \theta, l)$  —— (这相当于前述的第 (2) 种解法。)

7. 重复 2 —— 6 的过程至流线位置修改量小于给定值为止。

应当指出: 第 (1) 种解法只是在  $\alpha = \alpha_0$  时保证了 (17) 式的成立, 而不能保证 (17) 式在任何  $\alpha$  下都成立。相反, 第 (2) 种解法则是在  $\theta = \theta_0$  时 (9) 式得以成立, 对任意的  $\theta$  则不一定处处成立。这种无法兼顾的现象, 在任何分解成两类流面代替三元直接求解时都是逃避不了的 (包括 [2] 在内)。解决问题的一个途径是选取这两种解的结果的平均值, 或以此为初值在两种方法中作轮番迭代, 如果这种迭代收敛的话, 则收敛的终值即为三元流动的解。

### § 3. 计算实例

某压气机的静止扩压叶栅, 参看图 5a, 叶栅进口尺寸  $r_{外} = 0.264$  米  $r_{内} = 0.159$  米, 叶栅轴向宽度为 0.042 米。叶片数目  $N = 42$ 。总的气体流量  $G_0 = 22.7$  公斤/秒; 压气机在该叶栅进口处的参量  $p_0 = 1.4341$  公斤/厘米<sup>2</sup>  $T_0 = 322.9^\circ K$ , 通过叶栅的总压恢复系数为 0.981, 假定总压恢复系数沿叶栅轴向宽度为线性分布。

叶型为圆锥面上的双圆弧, 参看图 5c, 在展开面的  $x-y$  座标系统中, 相邻的一对叶片的内、外型面具有如下座标: (单位为米)

0 凸 (0.0328, 0.072),  $\rho_{凸} = 0.045$

0 凹 (0.0394, 0.0639),  $\rho_{凹} = 0.06$ 。

计算叶栅内部的流动时, 使用附录的方法确定流线的法线座标; 使用 (25) 式确定流线曲率; 假定

$\frac{\partial s}{\partial n'} = 0$ , 使用 (23) 式计算圆锥流面上的速度分布;

使用 (27)' 式计算密度分布。由于叶片是径向直叶片, 使用 (26) 式积分流量时更为简单:

$$\int_0^{nM} \int_0^{n'M} V \rho dn' dn = \frac{G_0}{N}$$

使用台式计算机手算的结果与用电子计算机 (流线曲率法) 计算的结果比较于图 5 b, c; 两者是十分吻合的。

差别稍大的是进、出口附近。因为电子计算机解中包含叶栅外的上下游区, 考虑了上下游的“流动周期性条件”。值得指出的是: 本文解法虽不包含进出口区 (如图 5 c 中的进口 ABC 区), 并不限制它的使用。因为用无粘性的位流理论 (无脱离流动), 即使使用“满足周期性条件”来消除解的不确定性, 也是不正确的。进口处由于攻角的影响, 出口处由于压力面的急剧扩压, 附面层的影响, 已使这些部位的流动大为改观, 即使勉强用无粘性的位流理论算出一些结果, 也是不可信的。因此我们也只须计算叶栅内部的流动。

另外由于计算的是径向直叶片, 所以气流径向梯度的影响没有表现出来。只是为了比较的目的, 选了这个例题。对径向有流型扭曲的情况, 由于本文采用的是三元解, 而流线曲率法只能处理  $S_1$  (或  $S_2$ ) 流面上的二元解, 则其结果必定有较大差异。

附 图

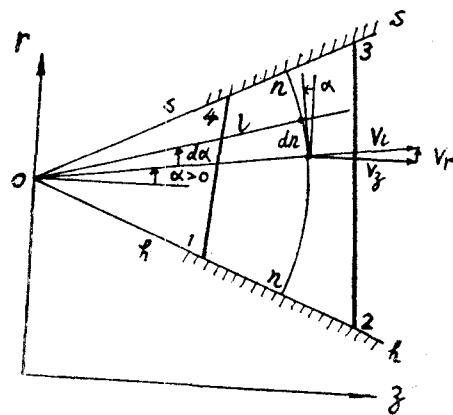


图 1

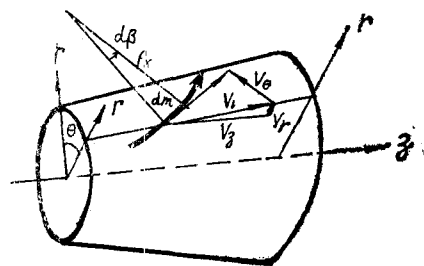


图 2

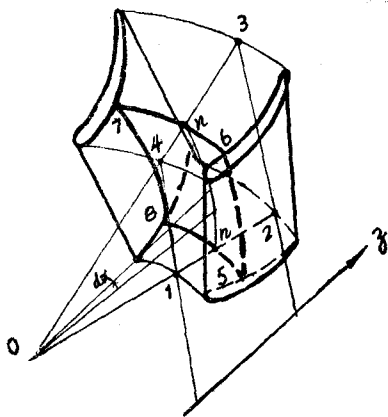


图 3

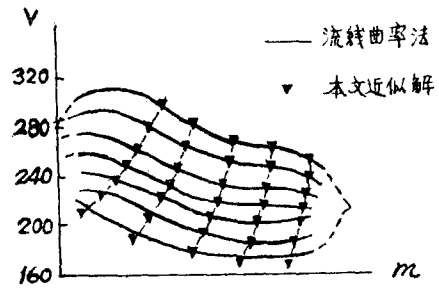


图5b

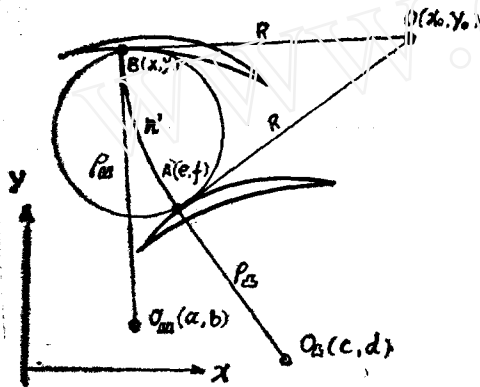


图 4

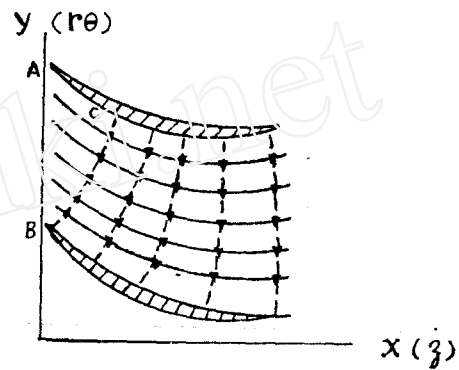


图5c

### 附录 双圆弧叶型的法线坐标

参看图 4，给定  $x-y$  坐标系中，双圆弧座标  $O_{凹}(a, b)$ ， $O_{凸}(c, d)$ ，半径  $\rho_{凸}$ ， $\rho_{凹}$  及叶型凸面上某一点  $A(e, f)$ 。要求出过  $A$  与叶型两面都正交的圆弧  $n'$ ，即确定  $B$  点座标、圆弧半径  $R$  及圆心  $O$  的座标。

从图上的几何关系，我们写出关于 5 个未知量  $x$ ， $y$ ， $x_0$ ， $y_0$ ， $R$  的 5 个方程

$$\begin{cases} \rho_{凹}^2 + R^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 \\ \rho_{凸}^2 + R^2 = (x_0 - c)^2 + (y_0 - d)^2 \\ R^2 = (x_0 - e)^2 + (y_0 - f)^2 \\ \rho_{凹}^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 \\ R^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 \end{cases}$$

可解出：

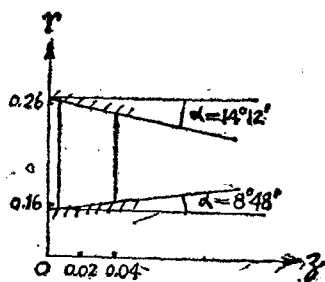


图 5 a

$$x_0 = \frac{1}{2} \frac{(f-d)(\rho_0^2 + e^2 + f^2 - a^2 - b^2) - (f-b)(\rho_0^2 + e^2 + f^2 - c^2 - d^2)}{(e-a)(f-d) - (e-c)(f-b)}$$

$$y_0 = \frac{1}{2} \frac{(e-a)(\rho_0^2 + e^2 + f^2 - c^2 - d^2) - (e-c)(\rho_0^2 + e^2 + f^2 - a^2 - b^2)}{(e-a)(f-d) - (e-c)(f-b)}$$

$$R = \sqrt{(x_0 - e)^2 + (y_0 - f)^2}$$

$$y = \rho_0 \frac{R(x_0 - a) + \rho_0^2(y_0 - b)}{R^2 + \rho_0^2} + b$$

$$x = \rho_0 \frac{\rho_0^2(x_0 - a) - R(y_0 - b)}{R^2 + \rho_0^2} + a$$

### 参 考 文 献

- [1] 吴仲华, NASA TN 2604(1952)。  
 [2] 忻孝康、蒋锦良, 计算叶轮机械三元流动的任定准正交面方法, 力学, 2(1977)。  
 [3] Katsanis, T, NASA TN D-2546(1964)。  
 [4] Katsanis, T, NASA TN D-2809(1965)。  
 [5] 刘殿魁、陈静宜、刁正纲, 叶轮机械沿任意曲线的运动方程及其应用, 力学, 3(1976)。

## 关于超高速水动力学问题

最近国外许多科技人员的注意力从开发外层空间转移到开发海洋。海洋学成为非常活跃的研究发展领域之一。我们不妨根据航空宇航技术的经验来预测海洋学的未来进程。本文着重研究水中和水面舰艇和导弹作超高速运动时, 在水中引起的流动现象的某些基本问题。

回顾飞机速度的提高过程, 并且将它同舰艇速度的未来发展加以比较, 颇有启发。二者既有许多相似之处, 又有一定的差别。通过比较不难发现: 超高速水动力学许多有意义的问题, 可以用高速高温空气动力学的知识加以解决。

现有各种舰艇的速度大大低于100节(100海里/小时)。水的声速大约为3000节。就速度而论, 现有造船技术还处于非常低的亚声速阶段, 即相当于飞机的初期发展阶段。在此阶段中水动力学问题的研究方法和空气动力学基本相同。

当水流速度提高到高亚声速和超声速时, 水的压缩性效应变得重要了。水流场和空气流场有许多不同之处。但是水和空气既然都是流体, 必然也有相似之

点。

高速水流显示出压缩性, 主要有两个原因, 即流动速度高和流体温度高。

对于高速效应来说,  $M$ 数(流速/声速)是一个重要参数。根据空气动力学知识, 根据 $M$ 数流动可分为亚声速, 跨声速, 超声速和高超声速四种型态。可以想见, 在超高速水的动力学中也存在类似的流动型态要加以处理。尽管最近的将来还不可能有高亚声速或超声速舰艇, 但是在科学技术飞跃发展的近代, 谁能怀疑, 在不远的将来水中会出现超声速甚至高超声速的舰艇或导弹呢。

在高速水流中一个有意义的现象是空泡。一旦水的运动使其压力低于蒸汽压力, 水蒸汽突然形成, 流场流线发生变化。而当水的压力高于蒸汽压力时, 空泡则突然破裂而发出巨响。空泡参数同 $M$ 数有一定关系。不过在超高速水动力学中, 空泡同时由高速的压力效应和高温的蒸发效应决定。

此外, 在超声速水流中也产生激波。不过水中激波有许多新现象, 例如, 假使激波强度很高, 波后的