论速度梯度方程的奇性及其它

复旦大学数学系流体力学教研室　　忻孝康　朱士灿

一　引　言

目前叶轮机械的三元流动理论和计算都有了很大的进展，发展了各种各样的求解方法。这些方法基本上分成两大类：一类是矩阵法，另一类是流线曲率法。这两种方法表面上求解过程很不相同，但本质上都同属于差分法一类。目前的矩阵法是对任意二元流面（S_1或S_2流面）上运动方程组化成流函数ψ的偏微分方程，然后直接进行差分离散化，进而迭代求解[1~4]。流线曲率法是在假设初始流线形状的基础上（从而通过数值微分和积分——通常的三次样条曲线办法是典型的一种办法——求得流线上的斜率、曲率等几何参量），利用常微分方程的差分法（如Euler折线法、常用的预测-校正法[5]，即文献[6~7]的所谓Runge-Kutta法，这种称呼是不确切的），求解速度梯度方程，然后用积分形式的连续性方程进行流量校核和等分反插而得到新流线，再采用一定松弛因子而进行迭代循环[6~11]。

流线曲率法以其简洁、明瞭、内存量少、计算速度快的优点，得到了广大工程技术人员的采用，而矩阵法由于稳定、可靠、精确度高等优点，目前也已有很大的发展。有些文献指出[4, 20]，流线曲率法存在一个最大的缺点在于它的不稳定性。〔4，20〕指出这主要是由于离散曲线的斜率、曲率计算不准（与样条曲线的端点条件有关）而引起的。但是，按照我们的大量计算结果来看，尚存在另一方面的不稳定性来源，就是在流场内出现局部超音速时带来的解的不稳定性。

本文的主要目的是，试图论证跨、超音速流场计算时流线曲率法存在的问题和应用的可能性，同时对一些基本性的问题进行一定的讨论，提出一些粗浅的看法，以期引起有益的讨论。

二　流线曲率法解的不稳定性

为讨论方便起见，不失一般性，我们假设叶轮机械内的流动是等熵绝热的，气体是等C_p和C_v的完全气体，在等ω（绕z轴）旋转的相对坐标系内，定常流动的运动方程组为：[1、6]

$$\left.\begin{aligned}&\frac{Dw_r}{Dt}-\frac{V_\theta^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\\&\frac{1}{r}\frac{D(r\cdot V_\theta)}{Dt}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial\theta}\\&\frac{Dw_z}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}\end{aligned}\right\}\text{动力学方程}\qquad(1)$$

$$\frac{D\ln\rho}{Dt}+\nabla\cdot\vec{w}=0\qquad\text{连续性方程}\qquad(2)$$

$$dh=C_p dT=\frac{dp}{\rho}\qquad\text{等熵关系式}\qquad(3)$$

$$P=\rho gRT\qquad\text{状态方程}\qquad(4)$$

其中$\vec{w}$为相对速度矢量，$V_\theta=w_\theta+\omega r$，h为热焓，$\frac{D}{Dt}=w_r\frac{\partial}{\partial r}+w_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta}+w_z\frac{\partial}{\partial z}$。

这是一个六个未知函数$\vec{w}$、p、ρ、T的六个方程组的边值问题。方程（1）有一个首次积分（相当于通常的Bernoulli方程），沿流线成立：

$$I=h+\frac{w^2-\omega^2r^2}{2}=\text{const}=C\ (\psi)$$

Katsanis[6]最早导出了沿空间任意曲线方向q的速度梯度方程式：

$$\frac{dw}{dq}=a\frac{dr}{dq}+b\frac{dz}{dq}+c\frac{d\theta}{dq}+\frac{1}{w}\left(\frac{dh_i'}{dq}-\omega\frac{d\lambda}{dq}\right)\qquad(5)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&a=\frac{w\cos^2\beta\cos\alpha}{r_c}-\frac{w\sin^2\beta}{r}+\sin\alpha\cos\beta\frac{dw_m}{dm}-2\omega\sin\beta\\&b=-\frac{w\cos^2\beta\sin\alpha}{r_c}+\cos\alpha\cos\beta\frac{dw_m}{dm}\\&c=w\sin\alpha\sin\beta\cos\beta+r\cos\beta\left(\frac{dw_\theta}{dm}+2\omega\sin\alpha\right)\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

这里α是子午流线与z轴倾角，β为相对速度矢量与子午面夹角，r_c为子午流线曲率半径，$w_m=w\cos\beta$，$w_\theta=w\sin\beta$，h_i'为进口滞止焓，λ为进口预旋度。由于最后一项$\frac{1}{w}\left(\frac{dh'_i}{dq}-\omega\frac{d\lambda}{dq}\right)$与我们讨论无关，不影响结果，故为简洁起见暂时略去。

在文献〔11〕中，我们发展了一个任定准正交面方法，把常用的准正交线的二元方法直接拓广到三元求解。这个方法的理论基础是，对流场内任一点p，使得在该点满足三个互不重合方向的速度梯度方程来代替（1）式，因此运动方程同样完全满足。有关这方面的论证可参看我们的总结报告[22]。

三个互不重合的方向取作如下，一个方向是子午流线方向（m）的速度梯度方程。

在（5）式中令q＝m，利用几何关系式：

$$\frac{dr}{dm}=\sin\alpha,\qquad \frac{dz}{dm}=\cos\alpha,\qquad \frac{rd\theta}{dm}=tg\beta$$

可得：

$$\frac{dw}{dm}=\cos\beta\frac{dw_m}{dm}+\sin\beta\frac{dw_\theta}{dm} \tag{7}$$

这已不是一个常微分方程了，而是一个几何关系式。因为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dw_m}{dm}&=\frac{d(w\cos\beta)}{dm}=\cos\beta\frac{dw}{dm}-w\sin\beta\frac{d\beta}{dm}\\ \frac{dw_\theta}{dm}&=\frac{d(w\sin\beta)}{dm}=\sin\beta\frac{dw}{dm}+w\cos\beta\frac{d\beta}{dm}\end{aligned}\right\} \tag{7a}$$

由于流线曲率法是从假设流线位置和其上的速度分布出发的，因此沿流线方向的方程（7）并不需要求解，所以不存在任何问题。

第二个方向是准正交线AB回转而成的准正交面与S_2流面的交线方向q_m，这时[11]：

$$\frac{dw}{dq_m}=Aw+B+(Cw+D)\frac{d\theta}{dq_m} \tag{8}$$

其中

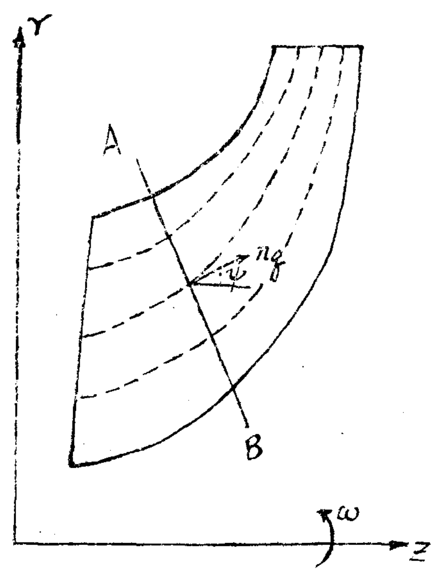
$$\left.\begin{aligned}A&=\cos^2\beta\cos(\psi-\alpha)/r_c-\sin^2\beta\cos\psi/r\\ B&=-\cos\beta\sin(\psi-\alpha)\frac{dw_m}{dm}-2\omega\sin\beta\cos\psi\\ C&=\sin\alpha\sin\beta\cos\beta\\ D&=r\cos\beta\left(\frac{dw_m}{d\theta}+2\omega\sin\alpha\right)\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

第三个方向通常取作θ方向，这时[11]：

$$\frac{dw}{d\theta}=Cw+D \tag{10}$$

其中C、D仍按（9）式计算。

现在就用方程（7）、（8）、（9）来代替（1）式的三个方向（r、θ、z）的方程，因此运动方程组仍然是封闭的。由于流线在迭代过程中是已知的，流线上的流动量也为已知，故（7）式自动成立，只要在准正交面上求解方程（8）、（10）就可以了。这是一般的三元流场的求解办法，对于二元流场（如S_1或S_2流面）就只要解一个常微分方程（8）或（10）就可以了。



原来的准正交线方法中[6,7]，$\frac{dw_m}{dm}$、$\frac{dw_\theta}{dm}$项是在迭代过程中，利用前一次迭代的w

和cosβ、sinβ值，然后对wcosβ，wsinβ作为离散曲线应用样条求导数的办法而得到的。一般在纯亚音速流场，这个过程虽有一点不稳定性（如[4]、[21]指出的求曲率的影响），但往往还可以使它收敛的。但是在接近音速或跨音速（出现局部的超音速小包）流场计算时，由$\frac{dw_m}{dm}$、$\frac{dw_\theta}{dw}$计算往往会带来无法消除的不稳定性。从我们的多次反复计算中，发现对于离心叶轮在高ω转速时，叶片的吸力面上往往出现局部超音速，这时解很不稳定，无论用多大的松弛因子也无法收敛下去。而对同一只轮子，在低ω的同样工况下，解很好地收敛达到所需的精度（流线变化的最大变动距离只有几丝）。从中间计算结果来看，在轮盖吸力面上，w值沿m的变化波动十分厉害（如右图），因此$\frac{dw_m}{dm}$、$\frac{dw_\theta}{dm}$项的计算（如果用样条的话）波动必然很大，从而引起了计算的不稳定性。

数值计算的实践给我们一个启示，就是在求解速度梯度方程时，必须严格区分流动的（亚、跨、超音速）类型，并作出必要的措施以保证计算的解是真实流体流动的近似解。

只要仔细的一查，我们就会发现准正交线方法，就是说它只限于适用于亚音速流场，数学上就是适用于椭园型方程的边值问题（实际上目前大多数方法均限于此），在出现局部超音速的跨音速流场或纯超音速流场，目前的矩阵法或流线曲率法均需要作相当大的努力才能够加以应用。国内外有些人认为流线曲率法很有希望（或理论上）可以用于跨、超音速流场计算，我们认为不对这些方法的传统步骤作根本性的改革和修正的话（正象差分法一样，不对超音速区采用特定的，有别于亚音速区的差分格式的话），是无法扩展到跨、超音速流场计算的，即使计算收敛了也可能收敛的不是真解[12]。

三　速度梯度方程的奇异性

Katsanis方法的梯度方程（5）中，左端项$\frac{dw_m}{dm}$、$\frac{dw_\theta}{dm}$实际上是含有音速奇点的。而这一点在他原来的计算中是被任意处理掉了，他用一个处处二阶连续的样条曲线来逼近$\frac{dw_m}{dm}$、$\frac{dw_\theta}{dm}$项，这就导致在跨音速流场计算时往往会出现不稳定性。

很多文献，特别是轴流机械方面的文献（如〔10，13，14，15〕），都推导出了$\frac{dw_m}{dm}$，

$\frac{dw_\theta}{dm}$的详细表达式，这里回顾一下推导过程对下面讨论也有好处。由首次积分式知：

$$\frac{D\ln\rho}{Dt}=\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}=\frac{1}{\rho a^2}\frac{Dp}{Dt}=\frac{1}{2a^2}\frac{D(\omega^2r^2)}{Dt}-\frac{1}{2a^2}\frac{Dw^2}{Dt}$$

$$=\frac{\omega^2r}{a^2}\frac{Dr}{Dt}-\frac{w_m}{a^2}\frac{Dw_m}{Dt}-\frac{w_\theta}{a^2}\frac{Dw_\theta}{Dt}$$

由于运动为定常的，故

$$\frac{D}{Dt}=w_m\frac{D}{Dm}$$

所以 $$\frac{D\ln\rho}{Dm}=\frac{1}{a^2}\left(\omega^2r\frac{Dr}{Dm}-w_m\frac{Dw_m}{Dm}-w\theta\frac{Dw_\theta}{Dm}\right. \tag{11}$$

另一方面，由〔14〕知：

$$\nabla\cdot\vec{w}=w_z\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rtg\alpha)}{\partial r}+\frac{\partial tg\beta}{r\partial\theta}\right]+w_r\frac{\sec\alpha}{r_c}+\frac{Dw_m}{Dm} \tag{12}$$

再利用连续性方程（2）式，可得：

$$\frac{w_m}{a^2}\left(\omega^2r\sin\alpha-w_m\frac{Dw_m}{Dm}-w_\theta\frac{Dw_\theta}{Dm}\right)w_m\cos\alpha\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rtg\alpha)}{\partial r}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial tg\beta}{r\partial\theta}\right]+w_m\sin\alpha\frac{\sec\alpha}{r_c}+\frac{Dw_m}{Dm}=0 \tag{13}$$

为了完全解出$\frac{Dw_m}{Dm}$项，必须弄清$\frac{Dw_\theta}{Dm}$项的值。一般在正问题时，按（7a）式知：

$$\cos\beta\frac{dw_\theta}{dm}=\sin\beta\frac{dw_m}{dm}+w\frac{d\beta}{dm}$$

故当$\beta\neq\pi/2$时，

$$\frac{dw_\theta}{dm}=tg\beta\frac{dw_m}{dm}+\frac{w}{\cos\beta}\frac{d\beta}{dm} \tag{14a}$$

但在工程计算中，往往还有一种所谓反问题[1]，那在给定

$$r\cdot V_\theta=G(r,z)$$

的情况下，求解流面形状和气动参数的问题。这时显然应该用如下公式[13]：

$$\frac{dw_\theta}{dm}=\frac{1}{r}\frac{d(r\cdot V_\theta)}{dm}-\frac{\sin\alpha}{r}(w_\theta+2\omega r) \tag{14b}$$

因此，把（14a，b）式代入（13）式得到：

对正问题：

$$\frac{dw_m}{dm}=\frac{w_m}{1-M_w^2}\left[M_w^2tg\beta\frac{d\beta}{dm}-\frac{\omega^2r}{a^2}\sin\alpha-\frac{tg\alpha}{r_c}-\frac{\partial tg\beta}{r\partial\theta}\right.$$

$$\left.-\frac{\cos\alpha}{r}\frac{\partial(rtg\alpha)}{\partial r}\right] \tag{15a}$$

对反问题：

$$\frac{dw_m}{dm}=\frac{w_m}{1-M_w^2}\left[\frac{w_\theta}{ra^2}\frac{d(rV_\theta)}{dm}-\frac{\sin\alpha}{ra^2}V_\theta^2-\frac{tg\alpha}{rc}-\frac{\partial tg\beta}{r\partial\theta}\right.$$

$$\left.-\frac{\cos\alpha}{r}\frac{\partial(rtg\alpha)}{\partial r}\right] \tag{15b}$$

其中 $M_w=\frac{w}{a}$为相对马赫数，$M_m=w_m/a$为相对子午马赫数。

这说明，无论哪种情况，$\frac{dw_m}{dm}$项（从而$\frac{dw_\theta}{dm}$项）都是含有奇性的，这个奇性是与流动从亚音速到超音速转换，或运动方程组从椭园型转到双曲型方程的边界相重合的。关于正问题和反问题的奇点或转换边界的差异（即相对马赫为一还是相对子午马赫数为一的问题），文献〔12〕专门讨论过这个问题，下一节我们再来讨论这个问题，这里只对正问题加以阐述。

有了（15）式，问题就清楚了。速度梯度方程实际上是含有奇性的，像文献〔6、7〕那样用样条导数来代替$\frac{dw_m}{dm}$、$\frac{dw_\theta}{dm}$在跨超音速附近就不合理了，因而解就有可能引起不稳定。在这种情况下，速度梯度方程（5）实际上具有如下形式：

$$\frac{dw}{dq}=\frac{f(w,q)}{1-M_w^2} \tag{16}$$

其中f（w，q）是一个处处正则的函数。

因此，要求解跨音速流场，必须有一种良好的办法来处理形如（16）的奇性微分方程。如果我们仍限于常规的差分格式（如预测—校正法）或硬性的避开奇性（如〔10〕），显然是不能给出跨、超音速流场的真实答案的。

值得提一下，文献〔16〕也给出了一个类似的奇性公式，它指出对于给定流面流动：

$$\frac{\partial\rho}{\partial\psi}=\frac{1}{M_w^2-1}\cdot\frac{1}{kRT(\rho t')^2}\left\{\left(1-\frac{w_\theta n_r}{w_r n_\theta}\right)D_z\frac{\partial D_z}{\partial\psi}+\left(1-\frac{w_\theta n_z}{w_z n_\theta}\right)\right.$$

$$\left.\times D_r\frac{\partial D_r}{\partial\psi}\right\} \tag{17}$$

$\partial\rho/\partial\psi$项的奇性（即$M_w\to1$时，$\partial\rho/\partial\psi\to\infty$）与椭园型流动和双曲型流动的分离边界是一致的。

四 常规计算方法的速度界限

现在我们要来讨论一下文献〔12〕所指出的一个重要问题，就是常规计算方法（无论是流线曲率法或矩阵法）能否计算到相对速度为超音速（而子午马赫数仍小于一）的情况。许多作者（如，〔1〕、〔3〕、〔4〕、〔10〕、〔17〕等）认为，在反问题时应该可以计算到这种情况，因为梯度方程尚无奇性，一直可算到$M_m=1$。〔12〕的作者大胆地提出了不同的看法，认为S_2流面（无论正、反问题）计算时的流动分界点应

为$M_w=1$，文章还指出了〔1〕的一些问题。

这是一个相当重要的问题，特别对跨、超音速叶片的设计和计算尤为重要。我们认为〔12〕的观点和结论是正确的，但对〔1〕提出的辩论证据尚不充分，且没有指出〔1〕的问题所在。〔12〕指出〔1〕的推导中，"$\overline{\frac{\partial \ln\beta}{\partial r}}$、$\overline{\frac{\partial \ln\beta}{\partial z}}$ F_r诸项实质上是隐含着二阶导数$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$、$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$的"，因此偏微分方程类型的判别公式有问题。这种指摘尚欠明确，因为〔1〕对S_1流面的正、反问题和S_2流面的正问题的方程中，同样有这样一些项，然而结论却是完全正确，为什么在S_2流面的反问题时特别把这些项提出来呢？另一方面，〔12〕又没有推导出反问题时的运动方程式，所以使人感到不能信服。

然而，〔12〕指出，双曲型方程（超音速流动）是完全不同于椭园型方程的，采用椭园型方程的常规方法来解双曲型方程，往往会出现迭代发散或者即使收敛但不一定收敛于真解等一些观点，我们很赞同，而这往往被搞工程的同志所忽略。实际上，无论用什么差分方法，只有考虑到流场的类型才能进行差分化。由于超音速流动的特性（如特征线、倒马赫锥、扰动讯号传播规律等），一般不能用亚音速流动的方法直接套用到超音速流动中去。即使是差分格式，对不同的区域也必须用完全不同的差分格式。很多作者认为，流线曲率法理论上（或有希望）可以计算超音速流场，我们认为若不采用一些特殊的办法是无法按照传统步骤计算到跨、超音速流场的。

下面我们来看一个很有意思的例子，它可以用来说明，若不区分流动类型而按常规方法求解往往是会导致错误结果的。许多人认为若能够避开梯度方程的奇性，就可以计算到超音速流场而得到的结果总是对的（如〔10〕采用前一次近似值避开奇性），我们认为这是不正确的。

考虑〔3〕提出的平面叶栅流线曲率法例子，对平面定常无旋的叶栅绕流问题，运动方程组为：

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}=\frac{\partial v_y}{\partial x} \qquad \text{无旋方程} \tag{18}$$

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}=0 \qquad \text{连续性方程} \tag{19}$$

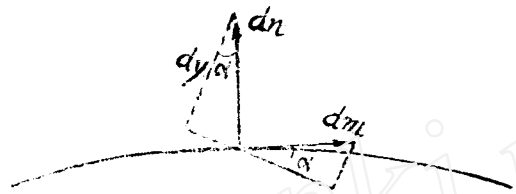
$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad \text{等熵关系式} \tag{20}$$

令 $v_x=v\cos\alpha$，$v_y=v\sin\alpha$，则可得到y方向的速度梯度方程：

$$\frac{\partial v}{\partial y}=V\left\{\left[\frac{2a_0^2-(\gamma-1)V^2}{2a_0^2-(\gamma+1)V^2}\right]\left(k\sin\alpha-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)tg\alpha+k\cos\alpha\right\} \tag{21}$$

其中$k=\frac{d\alpha}{dm}$为流线曲率，γ为绝热指数，a为音速，下标"o"表示滞止参数。

很明显，梯度方程（21）是含有奇性的，奇点在$V^2=\frac{\gamma+1}{2}a_0^2=a^2$，这是与亚、



超音速的流动分界点重合的。

如果我们现在来列出流线的正交线n方向的速度梯度的话，会得到什么结果呢？由微分关系式知：

$$\frac{d}{dn}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{dn}=-\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\alpha\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{d}{dm}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dm}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{dm}=\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}$$

由（18）式知

$$\frac{\partial(v\cos\alpha)}{\partial y}-\frac{\partial(v\sin\alpha)}{\partial x}=0$$

所以 $$\cos\alpha\frac{\partial v}{\partial y}-\sin\alpha\frac{\partial v}{\partial x}-v\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial y}-v\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}=0$$

所以 $$\frac{\partial v}{\partial n}=v\frac{d\alpha}{dm}=v\cdot k \tag{22}$$

其中m为流线方向弧长，k为流线曲率。

方程（22）是沿流线的正交线方向的速度梯度方程，它已不再含有任何音速奇性了，因此是否可以用（22）式加上常规的迭代步骤来计算叶栅的跨、超音速流场呢？显然，这是不可能的。

这个例子还说明了一个问题，就是方程（22）只是由无旋方程（18）导出的，没有用到过连续性方程，因而无法体现出流动的不同类型（亚、超音速流动）。这个性质恰恰与前面讨论的准正交线方法一样，Katsanis导出的速度梯度方程（5）也只用到动力学方程和等熵条件，而没有用到过连续性方程，因此方程（5）中也不出现奇性，而只有在用到连续性方程（2）后，把$\frac{dw_m}{dm}$项表示成(15)式后，这时才出现了奇性。因此，我们认为速度梯度方程不出现奇性并不表示流动一直可以计算到跨、超音速；如果方程出现了奇性，也并不能像有的作者（如Novak[10]）所说的那样，可以用前一次的迭代值来代替$\frac{dw_m}{dm}$就能够避开奇性，而一直算到跨、超音速，这样做往往会得到错误的结论。

最后，我们来论证一下，常规的计算方法其速度界限到底是$M_w<1$还是反问题时为$M_m<1$。到目前为止，对于S_1流面的正、反问题，S_2流面的正问题以及真正的三元

位势流动（如〔1〕的方程（26）），大家的结论是一致的：$M_w<1$。而对S_2流面的反问题，〔12〕认为仍应是$M_w<1$而〔1〕和其它人认为是$M_m<1$。我们认为〔12〕的结论是正确的。产生表面分歧的原因，可以从公式（15）的推导中看出来。在$r\cdot v_\theta=G(r,z)$作为给定规律后[1]，$\frac{dw_\theta}{dm}$项就给定了，因此必然会推导出（15b）来，看来是"完全合理"的。但是，这里存在两个问题：一个是在设计问题（反问题）时，你人为的给出规律$r\cdot v_\theta=G(r, z)$是否一定是正确的？你能够保证它在相对速度为超音速时（但子午马赫数仍小于一）仍能符合你给出的这种规律吗？当然，有人会辩解说，我希望设计出的轮子能符合这样规律，不是也可以吗？接下去就发生了另一个问题，就是你按反问题设计计算完成之后，得到了确定的叶片形状，这时你必然要按正问题的方法来"校核"原来的设计，看看是否达到了原来的设计要求。这时我们马上就发现有一个困难，正问题的流动分界点为$M_w<1$，因此要计算$M_w\geqslant1$（M_m仍<1）必然要使用其它的办法（如时间相关法）。但是更本质的问题在于，在跨、超音速流场时，$rv_\theta=G(r, z)$规律是无法正确给定的。因为，一方面按照（7a）和（14a）式可知，$\frac{dw_\theta}{dm}$和$\frac{dw_m}{dm}$一样在音速点有同样的奇性，从而$\frac{d(rv_\theta)}{dm}$也有同样奇性（无穷大值），另一方面该奇性点位于流场的$M_w=1$的点，而$M_w=1$点位于流场何处，则必须由解正问题才能决定，预先是未知的。因此，$rv_\theta=G(r, z)$规律是无法预先给定的，因为该曲面在流场的未知点上达到无穷大的斜率。所以把正、反问题统一起来看，我们认为常规计算方法的速度界限应为$M_w<1$而不是$M_m<1$。这就是我们的看法。

五　结束语

这里我们提出了一些关于速度梯度方程的奇异性问题和有关数值计算的速度界限问题的看法。我们认为目前的常规计算方法，采用传统的计算步骤是无法计算跨、超音速流场的。要计算像S_1或S_2流面的上跨、超音速流场（总的亚音速流场中含有局部超音速小包，有或无λ形激波的情况），必须对不同流场区域采用不同的差分格式（如计算跨音速孤立翼型的Marman差分格式[21]），考虑到超音速流场的特性（如禁讯法则、扰动法则等）才能奏效。对于有激波情况，可以采用加入人工粘性项的时间相关法加以计算[18]。对于有激波情况，我们认为是否可以采用数值流体力学中目前发展的PIC方法和FLIC等方法[19]来解决处理激波的困难，当然也存在速度和内存的问题。以上是我们的一些粗浅看法，不当之处希大家批评、指正。

参 考 文 献

〔1〕吴仲华，轴流、径流和混流式亚音速与超音速叶轮机械中三维流动的普遍理论，NACA TN—2604（1952），内燃机研究所译。

〔2〕Marsh，H.，利用矩阵通流方法计算任意透平机械中流体流动的数字计算机程

序，A.R.C.R.&M.3509（1968）.
〔3〕Smith，D.J.L.&Frost，D.H.，通过透平机械叶片的流动计算，Proc.IME，184，pt3G（Ⅱ）（1969），70*.
〔4〕Davis，W.R.，离心式透平机械子午面内可压缩流动的一个通用的有限差分方法，ASME 75-Gt-121.**
〔5〕复旦大学数学系编，微分方程及其数值解，上海人民出版社（1976）.
〔6〕Katsanis，T.，利用任定准正交线计算透平机械子午面上的流动分布，NASA TN D-2546（1964）***
〔7〕Katsanis，T.，利用任定准正交线计算透平机械跨叶片面上的流动分布，NASA TN D-2809（1965）.***
〔8〕Katsanis，T.，透平叶列表面速度分布和阻塞流动的准三元计算之Fortran程序，NASA TN D-6177（1971）**
〔9〕妹尾泰利和中瀬敬之，通过混流式叶轮流动的分析，Tran.ASME（A），94，1（1972）.***
〔10〕Novak，R.A.，求解流体流动问题的流线曲率计算方法，Tran.ASME（A），89，4（1967）*
〔11〕忻孝康，蒋锦良，计算透平机械三元流动的任定准正交面方法，全国叶轮机械气动热力计算、设计和试验经验交流会文集（1976）.
〔12〕黄瑞新，超音速流面理论的一些问题，中国科学院北京力学所研究工作报告（1976）.
〔13〕陈静宜、刘殿魁，叶轮机械沿任意曲线运动方程的通用形式及其应用，全国叶轮机械气动热力计算、设计和试验经验交流会文集（1976）.
〔14〕Smith，L.H.，透平机械的径向平衡方程，Trans.ASME（A），88，1（1966）.
〔15〕Molti，C.S.，轴对称流动理论在轴流式透平机械中的应用，Jour.Aeronaut.Soc.india，10，1，（1967）*
〔16〕Bosman etc.，松弛因子对透平机械流动计算性质的影响，A.R.C.R&M.3766（1975）.**
〔17〕北京航空学院404教研室，轴流压气机超、跨音级气动设计的计算程序，全国叶轮机械气动热力计算、设计和试验经验交流会文集（1976）.
〔18〕北京航空学院404教研室，跨音带冲波二维平面叶栅流场计算，全国叶轮机械气动热力计算、设计和试验经验交流会文集（1976）.
〔19〕Harlow，F.H.&Amsden，A.A.，数值流体动力学，力学情报，5（1973）.
〔20〕Wilkinson，D.H，Stability，Convergence and accuracy of two-dimensional streamline curvature methods using guasi-orthogonals，Proc.IME，84（1970）.
〔21〕Murman，E.M.&.Cole，J.D.，Calculation of plane steady transonic

flows, AIAA Jour.9, 1 (1971).
〔22〕复旦大学流体力学教研室，任定准正交面方法试算结果小结（I），内部研究工作报告（1977）.

注：带“•”的文献参看七院三所翻译的“透平机械长叶片级中的三元流动”一文，1974.
带“••”的文献参看合肥通用机械研究所出版的“离心压缩机研究”一文，1977.
带“•••”的文献参看西安交大翻译的“透平机械三元流动理论”一文，1974.