

# 流面理论探讨

力学所 黄瑞新

## 摘 要

本文从三维流动的物理现象和偏微分方程组的理论分析出发,讨论了流面模型,流面方程组的类型和流面交叉迭代的收敛问题。指出在超音速条件下流面理论的局限性。

## 一、前 言

由于叶轮机械生产的巨大发展和计算技术日新月异的进步,叶轮机械气动力学已取得了显著的成绩。目前叶轮机械已进入跨、超音速工作范围,实践中提出了不少新的课题。以全超音速压气机为例,由于转子全部叶高范围内相对来流都是超音速的,实验结果(全息照相或激光测速)证明叶片槽道中有弯曲的激波面存在。而且,全超音速压气机的特性曲线极陡,在设计工况下,对应一个转速只有一个流量。全超音速压气机的这些特点,是由于整个转子中流动均为超音速,故有激波,而且在叶片槽道区内,任何压力信号只能向下游传播,造成压气机内各流管之间的互相调节能力较差。在变工况情况下,下游一旦不适应时,信号无法传到上游,但来流又须满足唯一攻角(周期性)条件因此变工况性能很差。(对跨音速压气机,由于存在根部的亚音区,故流场中任一点的扰动最后总可以经过这个渠道反映到远前方去,所以跨音速压气机有较好的变工况性能和较高的效率)。如果我们用流面理论来处理这个问题,则在流场中所划出的 $S_2$ 流面上必然出现激波。在波前、波后气体的流速、密度等产生跳跃。而且外壳和轮毂的收敛(或扩张)效应只能以等熵波的形式向下游传播,因此也只能局限在叶尖、叶根附近。按过去沿用的 $S_2$ 流面正问题的提法\*,此时方程是双曲型的,因此比较正确地描述了上述物理现象。

但若我们采用 $S_2$ 流面反问题的提法,则对于现代的轴流式压气机而言,由于轴向马赫数 $M_z$ 多限制在 $M_z \leq 0.62$ 左右,而径向马赫数 $M_r$ 不会太大,子午面马赫数 $M_m < 1$ 总是成立的,因此 $S_2$ 流面反问题总是用椭圆型方程来描述的。既然方程是椭圆型的,故必然出现下述几个问题:

- 1)  $S_2$ 流面的本身算不出激波。
- 2)  $S_2$ 流面上不会有等熵波,故外壳和轮毂的收敛(扩张)可以影响到任一点的流

\*注:本文中所谓正问题和反问题的概念是按目前大家所习惯的说法,故和文献(1)中的定义略有不同。

场。

3) 要求给出封闭的边界条件, 采用椭圆型方程的差分格式。特别是下游边界或流场中任一点的变化可以影响到远前方的流场。

这些问题和前面分析的物理现象是不符合的。文献〔2〕对此进行了初步的分析。本文的目的是利用一阶偏微分方程组, 结合具体的物理现象进行系统的分析。从 $S_2$ 流面方程的类型问题, 以及 $S_1$ 流面上的后掠现象的分析, 指出产生问题的原因。

## 二、流面理论的几个数学问题

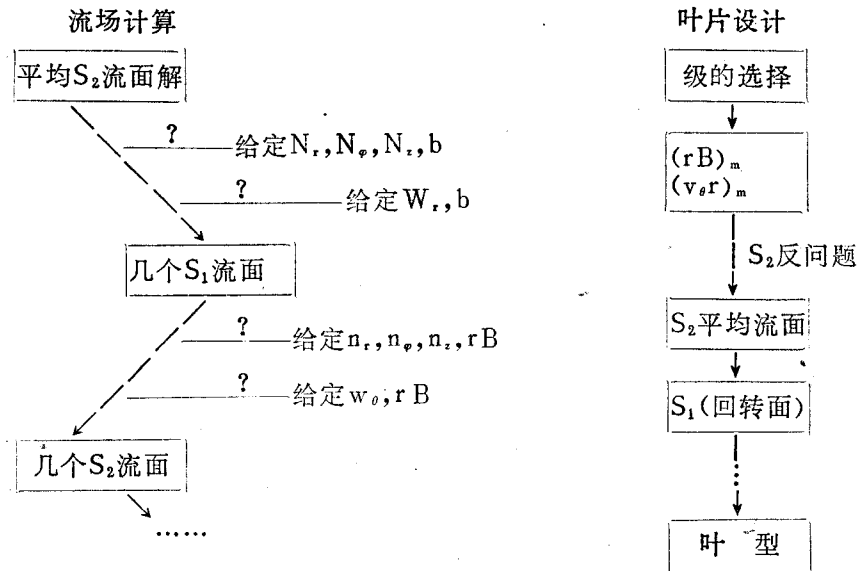
流面理论的要点是引入了流面的概念, 定义了流面厚度, 从而建立了流面上的二个自变量的偏微分方程, 把叶轮机械内部复杂的三维流动化简为两个二维曲面上的流动, 通过它们之间的交叉迭代, 最后获得三维流动的全局状况。流面理论的优点在于把三维降到二维, 这对于工程实践具有重要的实际意义。但正因为它是一种简化处理, 因此同时带来了几个有关的课题:

1) 流面上的方程与真实空间三维运动现象的一致性, 或者说方程的等价性、相容性。

2) 流面的交叉迭代是否收敛, 能否收敛于真实的三维流动。

3) 流面理论中解的适定问题, 即解的存在性, 唯一性, 对初始条件的稳定性。

以目前沿用的基本计算方法为例, 主要有两种, 即流场计算问题, 是给定叶片的几何条件和来流条件, 要求解整个流场; 另一种是设计问题, 给定来流条件和叶片加功量的分布, 要设计出满足要求的叶片。常用的计算框图如下:



由框图可知, 流面理论就是要求在 $S_1$ — $S_2$ 流面之间进行一定的交叉迭代计算(在工程上实际只作1—2次迭代交叉)但到底在这些交叉计算中, 应选择哪些参数作为下一轮计算的输入量, 才能确切地描述三维空间中的真实流动, 并且在实际上快而准确地获得解答? 换句话说, 什么条件下计算能收敛, 而且收敛得更快些?

另外一个问题是解的存在性问题, 如果预先给定了流面的厚度分布, 一般是求不出一个封闭的叶片型面的, 实际上还应当有一个“叶片型面封闭性条件”。在文献〔3〕的讨论中, 这个问题已引起了许多作者的注意, 但至今仍未解决, 在工程实践中, 目前采用了半经验的方法, 如在前后缘加上人工圆角, 这个问题还有待探讨。

### 三、 $S_2$ 流面理论

#### § 3.1 $S_2$ 流面的基本方程

文献〔1〕已对 $S_2$ ,  $S_1$ 流面作了详细的推证。对于 $S_2$ 流面, 在定义了流面厚度 $rB$ 和流面力 $\vec{F}$ 后,  $S_2$ 流面的偏微分方程组为

连续性方程

$$\frac{\delta}{\delta r} rB\rho w_r + \frac{\delta}{\delta z} rB\rho w_z = 0 \quad (1)$$

动量方程

$$w_r \frac{\delta w_r}{\delta r} + W_z \frac{\delta w_r}{\delta z} - \frac{(W_\varphi + \omega r)^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta r} = F_r \quad (2)$$

$$W_r \frac{\delta w_\varphi}{\delta r} + W_z \frac{\delta w_\varphi}{\delta z} + \frac{W_r W_\varphi}{r} + 2\omega W_r = F_\varphi \quad (3)$$

$$W_r \frac{\delta w_z}{\delta r} + W_z \frac{\delta w_z}{\delta z} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta P}{\delta z} = F_z \quad (4)$$

能量方程

$$W_r \frac{\delta I}{\delta r} + W_z = \frac{\delta I}{\delta z} T W_r \frac{\delta s}{\delta r} + T W_z \frac{\delta s}{\delta z} \quad (5)$$

流面微分几何关系

$$n_r W_r + n_\varphi W_\varphi + n_z W_z = 0 \quad (6)$$

$$\text{其中 } F_\varphi = -\frac{1}{\rho r} \frac{\delta p}{\delta \varphi} \quad (7)$$

$$F_r = \frac{n_r}{n_\varphi} F_\varphi \quad (8)$$

$$F_z = \frac{n_z}{n_\varphi} \quad (9)$$

热力学关系

$$I = h + \frac{1}{2} (W_r^2 + W_\varphi^2 + W_z^2) - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \quad (10)$$

$$dh = \frac{1}{\rho} dp + T ds \quad (11)$$

后一方程又可改写成

$$dh = \frac{r}{r-1} \cdot \frac{1}{\rho} dp - \frac{1}{r-1} \cdot \frac{C^2}{\rho} d\rho$$

$$\text{故 } h_p = \frac{r}{r-1} \cdot \frac{1}{\rho}, h_p = -\frac{1}{r-1} \frac{C^2}{\rho}$$

$$\therefore h_p = C^2 \left( -\frac{1}{\rho} - h_p \right) \quad (12)$$

注意上述方程中并不是互相独立的，其中有一个方程可以从其它方程的线性组合而得到。

### § 3.2 S<sub>2</sub>流面正问题

假定给出S<sub>2</sub>流面的全部几何条件，即流面厚度rB，流面法向量n<sub>r</sub>、n<sub>φ</sub>、n<sub>z</sub>，则上述的(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)、(8)、(9)等8个方程正好等于未知数的个数(W<sub>r</sub>、W<sub>φ</sub>、W<sub>z</sub>、P、ρ、Fr、F<sub>φ</sub>、F<sub>z</sub>)，(其中I、h可按热力学关系代入)加上适当的来流条件就可以求解。

由上述推证可知 $\vec{F}$ 是人为列入的流面力，实为未知函数，处理的办法一是作为迭代项处理，另一种更直截了当的办法是把 $\vec{F}$ 的定义利用上，把它从方程中完全消去，事实上目前不少作者已按后一种方法处理了。

#### 1) 严格的S<sub>2</sub>正问题

给定rB、(n<sub>r</sub>、n<sub>φ</sub>、n<sub>z</sub>)，并在方程中消去 $\vec{F}$ 项。

利用(3)、(8)、(9)可把 $\vec{F}$ 项消去后得到S<sub>2</sub>流面的偏微分方程组：

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta r} rB\rho w_r + \frac{\delta}{\delta z} rB\rho W_z = 0 \\ & W_r \frac{\delta w_r}{\delta r} + W_z \frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{n_r}{n_\phi} \left( W_r \frac{\delta w_\phi}{\delta r} + W_z \frac{\delta w_\phi}{\delta z} + \frac{W_r W_\phi}{r} \right. \\ & \quad \left. + 2\omega W_r \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta r} - \frac{1}{r} (W_\phi + \omega r)^2 = 0 \\ & W_r \frac{\delta W_z}{\delta r} + W_z \frac{\delta W_z}{\delta z} - \frac{n_z}{n_\phi} \left( W_r \frac{\delta W_\phi}{\delta r} + W_z \frac{\delta W_\phi}{\delta z} + \frac{W_r W_\phi}{r} \right. \\ & \quad \left. + 2\omega W_r \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\delta z}{\delta p} = 0 \\ & W_r \frac{\delta I}{\delta r} + W_z \frac{\delta I}{\delta z} = T W_r \frac{\delta S}{\delta r} + T W_z \frac{\delta S'}{\delta z} \end{aligned} \right\} (13)$$

上述偏微分方程组是4个未知数(W<sub>r</sub>、W<sub>z</sub>、P、ρ)的4个方程，加上适当的来流条件后就可以求解。我们可按一阶拟线性偏微分方程组的理论来讨论它的特征方程(可参考文献[4]、[5])：

$$\left( W_r - W_z \frac{dr}{dz} \right)^2 \left[ (\alpha^2 + \beta^2 + 1) \left( W_r^2 - 2W_r W_z \frac{dr}{dz} + W_z \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 \right) \right. \\ \left. C^2 \left( (\alpha^2 + 1) \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 + 2\alpha\beta \frac{dr}{dz} + (1 + \beta^2) \right) \right] = 0 \quad (14)$$

由第一个因子等于零，可知流线为双重特征线。由第二个因子等于零，得一个

$\frac{dr}{dz}$  的二次方程, 经过简单的代数运算后可知其判别式为  $\Delta = B^2 - 4AC = (W_r^2 + W_\varphi^2 + W_z^2) - C^2$ 。故  $W^2 < C^2$  时只是两个虚特征方向, 此时方程组称为椭圆型 (注意从理论上严格说, 此时的方程组仍有二个实特征方向, 故实属椭圆——双曲的中间类型)。当  $W^2 > C^2$  时, 方程组有四个实特征方向, 此时称之为双曲型。因此严格的  $S_2$  正问题方程类型和真实的三维流动是等价的。

## 2) 不严格的 $S_2$ 正问题

给定  $rB$ ,  $(n_r, n_\varphi, n_z)$ , 把  $\vec{F}$  项作为迭代项处理, 具体说来, 所谓  $\vec{F}$  作为迭代项处理有两种办法, 一是从上一轮的  $S_1$  流面计算结果作为输入值 (比如目前在第一轮的平均  $S_2$  流面计算中忽略  $\vec{F}$  项, 亦即取  $\vec{F} = 0$ ), 另一种办法是在  $S_2$  流面计算的迭代过程中, 取上一次迭代结果算出的  $\vec{F}$  作为已知量输入到后一次迭代中。正如文献 [6] 所指出的, 椭圆型方程的迭代本质上等价于一个时间相关法的推演过程, 所以这里所讨论的问题对于用时间相关法处理  $S_1$ 、 $S_2$  流面是同样适用的。总之,  $\vec{F}$  作为迭代项处理就是把它放在方程的右侧作为已知项来处理。于是  $S_2$  流面的方程组可以写成

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{\delta}{\delta r} r B \rho W_r + \frac{\delta}{\delta z} r B \rho W_z = 0 \\ & W_r \frac{\delta W_r}{\delta r} + W_z \frac{\delta W_r}{\delta z} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta r} = F_r + \frac{(W_\varphi + \omega r)^2}{r} \\ & W_r \frac{\delta W_z}{\delta r} + W_z \frac{\delta W_z}{\delta z} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta z} = F_z \\ & W_r \frac{\delta I}{\delta r} + W_z \frac{\delta I}{\delta z} = T W_r \frac{\delta S}{\delta r} + T W_z \frac{\delta S}{\delta z} \end{aligned} \right\} (15)$$

根据前述的办法可以得到它的特征方程

$$\begin{aligned} & (W_r - W_z \frac{dr}{dz})^2 \{ [(C^2 - W_z^2) (\frac{dr}{dz})^2 + 2W_r W_z \frac{dr}{dz} + (C^2 - W_r^2)] \\ & - \frac{C^2}{\rho h_p} (W_r - W_z \frac{dr}{dz}) (\alpha W_r + \beta W_z) (\beta \frac{dr}{dz} - \alpha) \} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

由第一因子等于零, 可知流线为双重特征线。

由第二因子等于零, 可得方程类型判别式:

i) 若大括号中  $\frac{C^2}{\rho h_p}$  项的系数为零, 则方程类型判别式为

$$W_r^2 + W_z^2 \geq C^2$$

ii) 一般情况下, 后一项并不为零, 故可得方程类型判别式为

$$\begin{aligned} & W_r^2 + W_z^2 - C^2 + \frac{W_\varphi}{\rho h_p} \left[ \frac{C^2}{\rho h_p} W_\varphi (\alpha W_z + \beta W_r)^2 \right. \\ & \left. - 3W_r W_z (\alpha W_z + \beta W_r) + C^2 W_\varphi \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

因此方程的类型和三维真实流动是不一致的, 可能在跨、超音速时把双曲型当作椭

园型来处理了。

3) 传统的 $S_2$ 正问题

给定 $rB$ ,  $\frac{W_\varphi}{W_z} = g(r, z)$ ,  $\vec{F}$ 项采用迭代法处理。这时 $S_2$ 流面方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta}{\delta r} r B \rho W_r + \frac{\delta}{\delta z} r B \rho W_z &= G \\ W_r \frac{\delta W_r}{\delta r} + W_z \frac{\delta W_r}{\delta z} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta r} &= Fr + \frac{1}{r} (g W_r + \omega r)^2 \\ W_r \frac{\delta W_z}{\delta r} + W_z \frac{\delta W_z}{\delta z} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta z} &= F_z \\ W_r \frac{\delta I}{\delta r} + W_z \frac{\delta I}{\delta z} &= W_r \frac{\delta S}{r} + T W_z \frac{\delta S}{\delta z} \end{aligned} \right\} (18)$$

按上述偏微分方程组的理论, 可以证明在  $(W_r^2 + W_\varphi^2 + W_z^2) > C^2$  时方程是双曲型的, 所以和三维流动是一致的, 这一点和文献 [1] 中引入流函数 $\Psi$ 后而导出二阶偏微分方程所得的类型判断是相同的。

4) 传统的 $S_2$ 正问题, 但消去 $\vec{F}$ 项。

即给定 $rB$ ,  $\frac{W_\varphi}{W_z} = g(r, z)$ , 消去 $\vec{F}$ 项 (注意, 这时实际上还须假定 $S_2$ 流面形状

已知, 即  $(n_r, n_\varphi, n_z)$  )。

此时 $S_2$ 流面的方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta}{\delta r} r B \rho W_r + \frac{\delta}{\delta z} r B \rho W_z &= 0 \\ W_r \frac{\delta W_r}{\delta r} + W_z \frac{\delta W_r}{\delta z} + \alpha \left( W_r \frac{\delta}{\delta r} g w_z + W_z \frac{\delta}{\delta z} g w_z + g \frac{W_r W_z}{r} \right. \\ &+ 2\omega W_r) + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta r} = \frac{1}{r} (g W_z + \omega r)^2 \\ W_r \frac{\delta W_z}{\delta r} + W_z \frac{\delta W_z}{\delta z} + \beta \left( W_r \frac{\delta}{\delta r} g w_z + W_z \frac{\delta}{\delta z} g w_z + g \frac{W_r W_z}{r} \right. \\ &+ 2\omega W_r) + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta z} = 0 \\ W_r \frac{\delta I}{\delta r} + W_z \frac{\delta I}{\delta z} &= T W_r \frac{\delta S}{\delta r} + T W_z \frac{\delta S}{\delta z} \end{aligned} \right\} (19)$$

其相应的特征方程为

$$\begin{aligned} & \left( W_r - W_z \frac{dr}{dz} \right)^2 \{ h_r [-\alpha g \frac{dr}{dz} - 1 - \beta g - \left( \frac{dr}{dz} \right)^2] - \left( W_r - W_z \frac{dz}{dr} \right) \\ & \left[ (1 + \beta g) \left( W_r - W_z \frac{dr}{dz} \right) h_r + \frac{1}{\rho} \left( (1 + g^2) W_r \frac{dr}{dz} \right. \right. \\ & \left. \left. - \alpha g w_r \frac{dr}{dz} - (1 + \beta g) w_r \right) \right] \} = 0 \end{aligned}$$

第一因子等于零说明流线为双重特征线。

第二因子等于零得出方程类型判别式：

i) 若  $n_r \equiv 0$ , 则  $\alpha = -\frac{n_r}{n_\varphi} \equiv 0$ ,  $\beta = -\frac{n_z}{n_\varphi} \equiv g$ , 则由第二因子可得方程类型判别

式为  $W^2 \geq C^2$ 。  $n_r \equiv 0$  说明叶片完全是由径向直线形成, 而且不计及  $S_2$  流面可能出现的径向扭曲, 这时候  $F_r \equiv 0$ , 故文献 [1] 中关于  $\Psi$  的二阶偏微分方程右侧中  $F_r$  项自动消失, 故两者是一致的。

ii) 一般而言  $n_r \equiv 0$ , 故方程类型判别式不是  $M^2 \geq C^2$ 。分析其原因, 是我们假定

$$g = \frac{W_\varphi}{W_z} = -\frac{n_r}{n_\varphi} \frac{W_r}{W_z} - \frac{n_z}{n_\varphi}$$

同时又假定  $(n_r, n_\varphi, n_z)$  为已给定, 故若  $n_r \equiv 0$ , 则上式等于规定了  $W_r/W_z$ , 因此方程又失去了一个自由度, 这种加的约束就可能造成方程类型的变化。

### § 3.3 $S_2$ 流面反问题

假定给出流面的厚度  $rB$ , 周向分速度  $W_\varphi$  (或加功量  $\Delta(\vec{V}_\varphi \cdot \vec{r})$ )。

此时流面的几何形状  $\varphi = \varphi(r, z)$  是未知的, 因此增加了一个未知数, 须补充一个沿流面的微分几何条件。对上述流面几何定义的方程求全微分, 可得

$$\frac{1}{r} d\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta r} dr + \frac{\delta\varphi}{\delta z} dz$$

$$\therefore -\frac{n_r}{n_\varphi} = r \frac{\delta\varphi}{\delta r}, \quad -\frac{n_z}{n_\varphi} = r \frac{\delta\varphi}{\delta z}$$

故此可得  $S_2$  流面反问题的方程组为：

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta r} rB\rho W_r + \frac{\delta}{\delta z} rB\rho W_z = 0 \\ & W_r \frac{\delta W_r}{\delta r} + W_z \frac{\delta W_z}{\delta z} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta r} = F_r + \frac{1}{r} (W_\varphi + \omega r)^2 \\ & W_r \frac{\delta W_z}{\delta r} + W_z \frac{\delta W_r}{\delta z} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta z} = F_z \\ & W_r \frac{\delta I}{\delta r} + W_z \frac{\delta I}{\delta z} = T W_r \frac{\delta S}{\delta r} + T W_z \frac{\delta S}{\delta z} \\ & W_r \frac{\delta \varphi}{\delta r} + W_z \frac{\delta \varphi}{\delta z} = \frac{W_\varphi}{r} \end{aligned} \right\} (21)$$

其中  $F_r = \frac{n_r}{n_\varphi} F_\varphi = -r \frac{\delta \varphi}{\delta r} F_\varphi$

$$F_z = \frac{n_z}{n_\varphi} F_\varphi = -r \frac{\delta \varphi}{\delta z} F_\varphi$$

$$F_\varphi = W_r \frac{\delta W_\varphi}{\delta r} + W_z \frac{\delta W_\varphi}{\delta z} + \frac{W_r W_\varphi}{r} + 2\omega W_r$$

1) 严格的  $S_2$  流面反问题

假定给出  $rB$ ,  $W_\varphi$ , 并在方程中消去  $\vec{F}$  项。

则方程组(21)可以写成

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta r} rB\rho W_r + \frac{\delta}{\delta z} rB\rho W_z = 0 \\ & W_r \frac{\delta W_r}{\delta r} + W_z \frac{\delta W_r}{\delta z} + r \left( W_r \frac{\delta W_\varphi}{\delta r} + W_z \frac{\delta W_\varphi}{\delta z} + \frac{W_r W_\varphi}{r} + \right. \\ & \quad \left. 2\omega W_r \right) \frac{\delta \varphi}{\delta r} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta r} = \frac{1}{r} (W_\varphi + \omega r)^2 \\ & W_r \frac{\delta W_z}{\delta r} + W_z \frac{\delta W_z}{\delta z} + r \left( W_r \frac{\delta W_\varphi}{\delta r} + W_z \frac{\delta W_\varphi}{\delta z} + \frac{W_r W_\varphi}{r} \right. \\ & \quad \left. + 2\omega W_r \right) \frac{\delta \varphi}{\delta z} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta z} = 0 \\ & W_r \frac{\delta I}{\delta r} + W_z \frac{\delta I}{\delta z} = T W_r \frac{\delta S}{\delta r} + T W_z \frac{\delta S}{\delta z} \\ & W_r \frac{\delta \varphi}{\delta r} + W_z \frac{\delta \varphi}{\delta z} = \frac{W_\varphi}{r} \end{aligned} \right\} (22)$$

其特征方程在化简后为

$$\left( W_r - W_z \frac{dr}{dz} \right)^3 \left[ (W_r^2 - C^2) \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 - 2W_r W_z \frac{dr}{dz} + W_r^2 - C^2 \right] = 0 \quad (23)$$

由第一因子为零, 知流线为三重特征线。

由第二因子为零, 得方程类型的判别式为

$$W_r^2 + W_z^2 \geq C^2$$

## 2) 不严格的 $S_2$ 反问题

假定已知  $rB$ ,  $W_\varphi$ ,  $\vec{F}$  项作为迭代项处理。

这时  $S_2$  流面方程组就是(21)式的形式。不难证明其特征方程和(23)式是完全一样的, 因此讨论也完全相同。

因此可知对于  $S_2$  流面反问题, 不论  $\vec{F}$  项如何处理, 方程类型是在  $W_r^2 + W_z^2 > C^2$  后才是双曲型的。

## § 3.4 $S_2$ 流面理论的几个问题

### 1) 流面力 $\vec{F}$ 的处理

从历史上来看,  $\vec{F}$  称为“叶片力”, 但为了更确切些不妨称为流面力。因为  $S_1$  流面上也有类似的虚拟力引入, 称为叶片力欠妥。流面力的引入是为了简化表面上的流动模型, 可以说若在三维空间中孤立分割出一个厚度的流面, 而流体之所以会在流面所规定的表面上运动, 是由于在流面上引入了这种虚拟的面积力。从推导的形式上来看, 它是在定义了流面的束缚导数后, 为化简动量方程而引入的。流面力实际是流动参数和流面几何条件的隐函数, 因此在方程中是完全可以消去的。由于  $\vec{F}$  项的引入, 使流面方程左



侧得以简化,这在过去计算手段不多的情况下是有利的。但是由于 $\vec{F}$ 项实质上隐含了未知量的偏导数,把它作为迭代项处理就可能引起方程类型的变化,而且也不利于获得最快的收敛。

## 2) $S_2$ 流面方程组的类型问题

从上述各种情况的分析可见,选择 $S_2$ 流面计算途径时,应充分注意方程的类型问题。显然采用严格的 $S_2$ 正问题提法,方程类型与三维流动现象是一致的,能正确描述物理现象。而且把尽可能多的隐含未知函数的偏导数项直接移到方程左侧,可充分反映方程的非线性,因此进行求解时有利于获得最快的收敛,这一点对于亚音速叶轮机械也是有意义的。

如前所述,不仅 $\vec{F}$ 项,而且 $rB$ ,  $n$ 等项均为隐含流动参数的偏导数项,都是可能造成方程类型的改变。消去 $\vec{F}$ 项,是进了一步。但如要根本解决这个隐含未知函数偏导数的问题,除非是完全放弃流面厚度这个概念,也就是完全摆脱 $S_1$ — $S_2$ 流面交叉迭代的求解方式,直接求解三维的流动。由于计算技术的发展,目前已经初步解决了这个问题(文献〔7〕)。但是对于工程计算来说,流面理论所提供的准三维解还是十分简便有利的。

虽然从理论的角度来看, $S_2$ 流面反问题存在方程类型 and 叶型封闭问题,但对于目前的跨音速压气机,采用平均 $S_2$ 流面上的反问题来进行半经验的设计(因为目前均采用回转型面上的几何造型法),效果还是不错的。但激波造成的熵突跃, $S_1$ 流面上的解析造型等问题尚待解决,这些问题和流面理论的整个物理模型是密切相关的。

# 四、 $S_1$ 流面理论

## § 4.1 三维半无限后掠直叶栅

一九三五年A. Busemann首先提出了在超音速飞行中采用后掠翼的设想后,对于后掠翼的理论和实验进行了很深入的研究,积累了大量的经验,其后美国的NACA又进行了后掠叶栅的研究。文献〔8〕比较系统地分析了后掠和斜面效应在叶轮机械设计中的应用问题。由于目前叶轮机械中主要的问题是流道倾斜,造成显著的叶片后掠现象,而叶片积迭线在周向的倾斜角一般只是 $i^\circ$ 的量级范围,斜面效应不显著,所以本文只讨论叶片的后掠现象,而不计及斜面效应。

如图1所示,在 $y > 0$ 的半空间中有一组半无限的后掠叶栅。假定其后掠角为 $\lambda$ 。文献〔8〕的分析指出,对这种叶栅的流动问题,应当把来流速度分解为一个平行于叶片前缘的速度和一个垂直于前缘的速度。利用后一个分速在垂直于前缘的平面A—A中求解一个二维平面流动,然后把所得的速度分布再迭加上平行于叶片前缘的速度分量,就可以得到真实的绕流情况(对于半无限叶栅的根部截面,还应加上端面效应的修正)。而若直接采用平行于来流的B—B截面进行计算就会产生偏差,文献〔8〕的分析进一步指出,这种不正确的计算方法会高估叶栅出口气流的折转角(等于高估了加功量)。

下面我们就利用直角坐标中的流面理论(见附录1)来分析这个问题。显然我们可以采用大体垂直于 $z$ 轴而平行于叶面的下流面作为我们惯用的 $S_2$ 流面。不难看出第一次

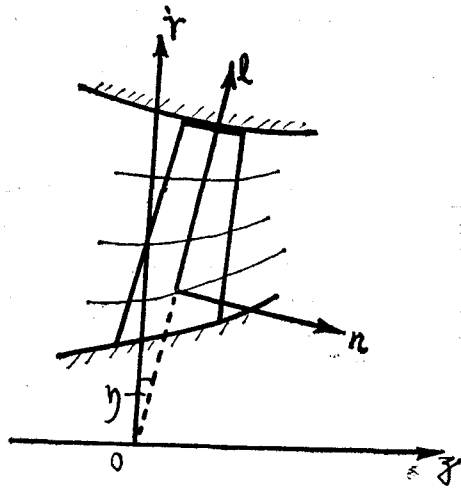


图 1

片前缘的方向折转，而叶盒的流线向平行于叶片前缘的方向折转，所以 $S_1$ 流面是翘曲的。

若沿着流线取B—B截面为 $S_1$ 流面，则相当于按全速度和给定的流面厚度，流面法向量来求解 $S_1$ 流面。这样算出的 $S_1$ 流面必然还是一个平行于 $xoy$ 平面的流面，因为流面的几何条件已给作为计算的输入规定死了。但是由于叶栅是后掠的，在第二轮的 $S_2$ 流面计算时，我们将发现由于在垂直于流动的方向上有压力梯度存在，故 $S_2$ 流面上的流线还应作适当的调整，特别是在接近叶盒、叶背的 $S_2$ 流面上。因此，原先所算出的没有翘曲的 $S_1$ 流面解是不准确的。通过第二轮几个 $S_2$ 流面的计算提供了新的翘曲的 $S_1$ 流面，然后再进行这种翘曲的 $S_1$ 流面的计算，反复迭代，以期逐步改进计算结果。

由此可见，在亚音速后掠叶栅中，如用全速度，沿着流动方向上切割得的 $S_1$ 流面来解算，将导致复杂的迭代计算，不但耗费时间，而且结果也不准确。幸而在亚音速情况下，这种费力的迭代似乎还可以找到合理的计算结果，这主要是由于亚音情况下信号可以传递到场中的任一点。因此在亚音速情况下，这种计算方法还是允许的。另一方面，我们看到，如果把 $u_x$ 固定，而只讨论 $u_n$ ，则正如文献〔8〕所指出的，我们是从垂直于叶片中心线的方向来考虑问题。这时，我们所着眼的速度是 $u_n$ ，几何条件就是从叶片中心线方向所看到的叶片基元截面的投影型线。这后一种算法使我们可以顺利准确地解算出整个流场。

在跨、超音速来流情况下，情况就完全不同了。今假定来流速度 $U$ 大于音速，但 $u_n$ 却小于叶片垂直剖面流动所对应的临界来流速度。则按上述第一种解法，我们可以一次就求出真正的翘曲的 $S_1$ 流面，而且流场中是不会出现激波的。这和后掠机翼的无数实践经验是完全一致的。但若按第二种解法，由于来流的全速度大于音速，故要求来流满足唯一攻角条件，而且 $S_1$ 流面上必然会计算出激波来，显然这种 $S_1$ 流面解是没有任何意义的。假如我们企图通过 $S_1$ — $S_2$ 流面的反复交叉来挽救这一点，那是很困难的。一方面是由于 $S_1$ 流面上的激波反映为 $S_2$ 流面的突然折转， $S_2$ 流面本身的计算无法消除这种折转，激波还是存在。另一方面对于每一次新的 $S_1$ 流面计算来说，不管输入的参数如何光滑，

解平均 $S_2$ 流面时，得到的将是所有的 $S_2$ 流面上的流线都平行于 $XOZ$ 坐标平面，流线间的间距在通过叶栅时不变。第二步是解 $S_1$ 流面—— $y$ 流面。若我们把来流速度中平行于叶片前缘的速度分量 $u_x$ 固定下来，而只考虑垂直分量 $u_n$ 的 $S_1$ 流动（实质上等于是在A—A截面上求解），则如前所述，这种解在迭加上 $u_x$ 分速后，就是真正的无限后掠叶栅的流动。我们注意到，真正求出的 $S_1$ 流面并非在A—A截面上。由于在叶背处气流加速，叶盆处气流减速。所以同样迭加上一个相同的 $u_x$ 后，叶背的流线向垂直于叶

由于来流是超音速的，总是会算出激波的。因此我们可以看到，在跨、超音速情况下这种解法是无法得到合理的结果的。在后掠角较小，后掠叶栅真正产生激波的情况下，两种算法也是不可能一致起来的。这种矛盾的根源在于 $S_1-S_2$ 流面交叉理论中，相邻的 $S_1$ 流面之间的联系是间接的，必须通过 $S_2$ 流面的计算来调整，因此这种联系是十分脆弱的。 $S_1$ 流面间由于前缘和叶面的倾斜，实际上是互相牵连，不可分割的。流面理论把各个 $S_1$ 流面孤立起来，分别处理，然后才通过 $S_2$ 流面来调整，往往会进一步削弱，甚至割断了这种联系。因此在后掠叶栅情况下，本来前面一个叶片截面已经把叶片存在这个信息传递到后面一个截面的前方流场中，防止了激波的产生。但若孤立，割裂出每个叶片的 $S_1$ 截面来看，自然会得到产生激波这样的错误结论。第一种方法之所以有利，是由于在无限后掠直叶栅时，这样解出的各个 $S_1$ 流面是完全一样的，所有参数均是对应的，所以各 $S_1$ 流面之间不再需要交换什么信息。显然在其他情况下，即有限展弦比或半无限叶栅时，这种矛盾将同样出现，企图通过 $S_1-S_2$ 流面的反复交叉迭代来获得精确解将是极其困难的，甚至是不可能的。

#### § 4.2 $S_1$ 流面基本方程

众所周知，在引入流面厚度后，就可以顺利地导出流面上的一整套偏微分方程组。在惯用的轴流式叶轮机机械的 $S_1$ 流面上，其形式是：

连续性方程

$$\frac{\delta}{\delta\varphi} b\rho W_\varphi + \frac{\delta}{\delta z} b\rho r W_z = 0 \quad (24)$$

动量方程

$$\frac{W_\varphi \delta W_r}{r \delta\varphi} + W_z \frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{(W_\varphi + \omega r)^2}{r} = f_r \quad (25)$$

$$\frac{W_\varphi \delta W_\varphi}{r \delta\varphi} + W_z \frac{\delta W_\varphi}{\delta z} + \frac{W_r W_\varphi}{r} + 2\omega W_r + \frac{1}{\rho r} \frac{\delta p}{\delta\varphi} = f_\varphi \quad (26)$$

$$\frac{W_\varphi \delta W_z}{r \delta\varphi} + W_z \frac{\delta W_z}{\delta z} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta z} = f_z \quad (27)$$

能量方程

$$\frac{W_\varphi \delta I}{r \delta\varphi} + W_z \frac{\delta I}{\delta z} = \frac{T W_\varphi \delta s}{r \delta\varphi} + T W_z \frac{\delta s}{\delta z} \quad (28)$$

流面微分几何关系

$$N_r W_r + N_\varphi W_\varphi + N_z W_z = 0 \quad (29)$$

其中  $f_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$

$$f_\varphi = \frac{N_\varphi}{N_r} f_r$$

$$f_z = \frac{N_z}{N_r} f_z$$

热力学关系

$$I = h + \frac{1}{2} (W_r^2 + W_\varphi^2 + W_z^2) - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \quad (30)$$

$$dh = \frac{1}{\rho} dp + T ds \quad (31)$$

### § 4.3 完全规定了流面几何条件的情况

假定规定了 $S_1$ 流面的厚度 $b$ 。流面的法向量 $(N_r, N_\varphi, N_z)$ ，则按前述的办法，可消去 $f$ 项而得 $S_1$ 流面的偏微分方程组

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta \varphi} b \rho W_\varphi + \frac{\delta}{\delta z} b \rho r W_z = 0 \\ & \frac{W_\varphi}{r} \frac{\delta W_\varphi}{\delta \varphi} + W_z \frac{\delta W_\varphi}{\delta z} - \frac{N_\varphi}{N_r} \left[ \frac{W_\varphi}{r} \frac{\delta W_r}{\delta \varphi} + W_z \frac{\delta W_z}{\delta z} - \frac{(W_\varphi + \omega r)^2}{r} \right] + \frac{1}{\rho r} \frac{\delta p}{\delta \varphi} + \frac{W_r W_\varphi}{r} + 2\omega W_r = 0 \\ & \frac{W_\varphi}{r} \frac{\delta W_z}{\delta \varphi} + W_z \frac{\delta W_z}{\delta z} - \frac{N_z}{N_r} \left[ \frac{W_\varphi}{r} \frac{\delta W_r}{\delta \varphi} + W_z \frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{(W_\varphi + \omega r)^2}{r} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta z} = 0 \\ & \frac{W_\varphi}{r} \frac{\delta I}{\delta \varphi} + W_z \frac{\delta I}{\delta z} = \frac{T W_\varphi}{r} \frac{\delta s}{\delta \varphi} + T W_z \frac{\delta s}{\delta z} \end{aligned} \right\} (32)$$

$$\text{其中 } W_r = -\frac{N_\varphi}{N_r} W_\varphi - \frac{N_z}{N_r} W_z$$

根据偏微分方程组的特征理论不难证明上述方程组在 $W^2 > C^2$ 时是双曲型的。

### § 4.4 规定了 $W_r$ 的情况

假定给出 $S_1$ 流面的厚度 $b$ ，径向分速 $W_r$ 。则此时流面形状 $r = r(\varphi, z)$ 为未知，由微分关系得

$$dr = \frac{1}{r} \frac{\delta r}{\delta \varphi} (r d\varphi) + \frac{\delta r}{\delta z} dz$$

$$\therefore -\frac{N_\varphi}{N_r} = \frac{\delta r}{r \delta \varphi}, \quad -\frac{N_z}{N_r} = \frac{\delta r}{\delta z}$$

在消去 $f$ 项后可得 $S_1$ 流面的偏微分方程组为

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta \varphi} b \rho W_\varphi + \frac{\delta}{\delta z} b \rho r W_z = 0 \\ & \frac{W_\varphi}{r} \frac{\delta W_\varphi}{\delta \varphi} + W_z \frac{\delta W_\varphi}{\delta z} + \frac{1}{r} \frac{\delta r}{\delta \varphi} \left[ \frac{W_\varphi}{r} \frac{\delta W_r}{\delta \varphi} + W_z \frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{(W_\varphi + \omega r)^2}{r} \right] + \frac{1}{\rho r} \frac{\delta p}{\delta \varphi} + \frac{W_r W_\varphi}{r} + 2\omega W_r = 0 \\ & \frac{W_\varphi}{r} \frac{\delta W_z}{\delta \varphi} + W_z \frac{\delta W_z}{\delta z} + \frac{\delta r}{\delta z} \left[ \frac{W_\varphi}{r} \frac{\delta W_r}{\delta \varphi} + W_z \frac{\delta W_r}{\delta z} - \frac{(W_\varphi + \omega r)^2}{r} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta z} = 0 \\ & \frac{W_\varphi}{r} \frac{\delta I}{\delta \varphi} + W_z \frac{\delta I}{\delta z} = \frac{T W_\varphi}{r} \frac{\delta s}{\delta \varphi} + T W_z \frac{\delta s}{\delta z} \end{aligned} \right\} (33)$$

$$-\frac{(W_\varphi + \omega r)^2}{r} \Bigg] + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta z} = 0$$

$$\frac{W_\varphi}{r} \frac{\delta I}{\delta \varphi} + W_z \frac{\delta r}{\delta z} = \frac{TW_\varphi}{r} \frac{\delta s}{\delta \varphi} + TW_z \frac{\delta s}{\delta z}$$

$$\frac{W_\varphi}{r} \frac{\delta r}{\delta \varphi} + W_z \frac{\delta r}{\delta z} = W_r$$

同样不难证明上述方程组在  $(W_\varphi^2 + W_z^2) > C^2$  时是双曲型的, 和分析  $S_2$  流面反问题时一样, 即使在(33)中引入流面力  $\vec{f}$ , 放到方程右侧作为迭代项处理时, 方程类型仍然不变。

#### § 4.5 $S_1$ 流面分析

上面讨论了两种不同的  $S_1$  流面方程, 并分析了方程的类型。但是从前面对后掠叶栅的分析可知, 完全规定  $S_1$  流面的形状, 并用全速度求解的方法只适用于没有后掠现象的情况 (此时实际的  $S_1$  流面的翘曲是可以忽略的)。

相反, 如果采用规定了  $W_r$  和流面厚度  $b$  的方法, 可以迅速地解决后掠叶片的绕流问题, 求出翘曲的  $S_1$  流面, 而且其他参数都比较准确。诚然, 这种方法只有在叶片完全由径向母线生成的情况下, 是一个最好的计算后掠效应的方法。(在叶片中心线在子午面内后倾时的讨论详见附录 2)。特别注意的是, 采用这种方法并不等于是在圆柱面上求解  $S_1$  流面。而是从  $S_2$  解中获得  $S_1$  流面的平均厚度和平均回转面形状, 利用这个平均回转面可以切出叶片的基元截面。但计算中所用的  $(\varphi, z)$  坐标是从径向观察该截面所得到的投影坐标。因此沿着流线, 半径  $r$  和总焓等参数是变化的! 这就是所谓流面上的束缚导数的实际意义, 正如我们计算  $S_2$  流面时是用它在子午面上的投影坐标来计算一样。

由前面对半无限直叶栅的后掠现象的分析可知, 在轴流式叶轮机械中, 由于后掠现象造成  $S_1$  流面的翘曲, 在通常情况下, 这种翘曲是叶背上由于局部气流的加速使流面扭向减小后掠角的方向, 而叶盆上由于局部气流的减速使流面扭向加大后掠角的方向。由于流面的翘曲对于落后角的计算和粘性二次流造成损失的计算是重要的前提, 因此深入研究后掠现象, 求解无粘性三维流动是十分重要的\*。

实际上, 叶轮机械中叶片的展弦比总是有限的, 端面 (根部或顶部) 的存在妨碍了  $S_1$  流面的翘曲, 因此对于根部截面还应加上端面效应的修正。根部  $S_1$  流面虽然仍然是回转面, 但是在叶盆, 叶背处流面厚度不同。在叶盆处, 由于上部流向下靠拢, 流片变薄, 速度增加而压力下降; 相反在叶背上流片变厚, 压力上升, 因此气流的折转角加大, 表现为叶片下游下洗角加大, 叶片做功量增加。文献 [8] 对于直叶栅中不可压流的根部下洗进行了分析。利用升力线理论证明, 对于中等稠度 ( $\sigma \approx 1 \sim 2$ ), 中等的后掠角 ( $\lambda \approx 20^\circ$ ), 在大于 0.2 倍弦长的展向位置外, 下洗效应就非常小, 随着  $\sigma$  的加大和  $\lambda$  的减小, 这种效应进一步削弱。文献 [9] 对于后掠机翼作了详细的分析, 表明随着来流马赫数的提高, 端面效应沿展向逐步扩展。图 2, 3 说明了这种情况 (取自文献 [9] 的图

\*注: 在本文初稿完成后, 笔者获悉复旦大学利用准正交面法解出亚音的完全三维流场, 并发现  $S_1$  流面的翘曲与文献 [1] 的方向相反。这和后掠现象分析是一致的。

A, 9e和A, 15h)。

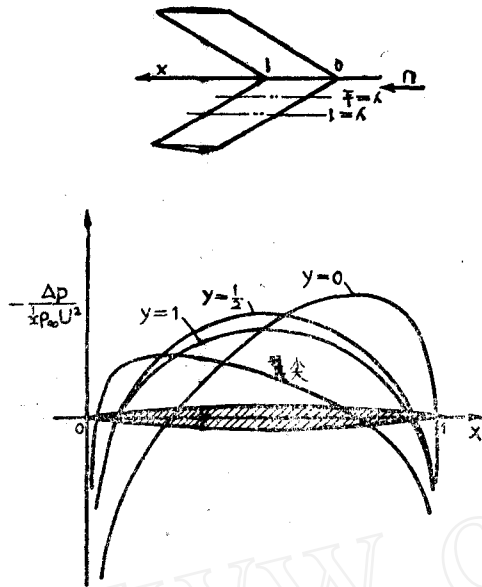


图 2, 后掠机翼中压力沿不同截面的分布;  $M_\infty = 0$ ,  $\lambda = 60^\circ$ 。

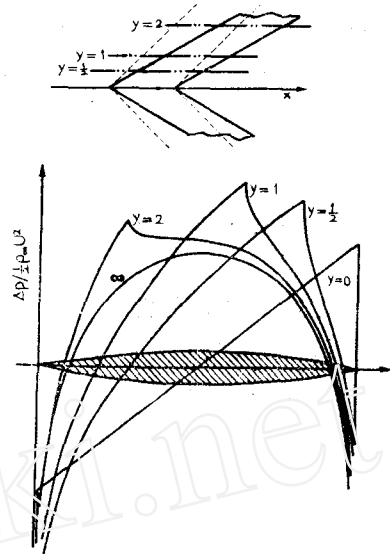


图 3, 无限翼展机翼中不同截面上压力分布;  $M_\infty = 1.4$ ,  $\lambda = 60^\circ$ 。

实际上, 超音速情况下, 根部或端部附近出现的波系是极复杂的, 无论回转  $S_1$  流面解或规定  $W_r$  的解都无法一次算出正确的流场。但如前所指出, 由于  $S_1$  流面间互相割裂, 超音速情况下, 互相间的扰动信息不能直接传递, 因此, 通过流面交叉迭代来求解这一复杂流场就难以得到一个收敛的准确解。

关于后掠角的计算, 文献 [8] 中已有详细的推证。假定叶片中心线在子午面内的倾角为  $\eta$ , 在周向平面内的倾角为  $\mu$ ,  $S_1$  流面的平均半锥角为  $\alpha$ , 则后掠角  $\lambda$  满足

$$\sin \lambda = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \eta + \operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \mu + \operatorname{tg}^2 \eta)(1 + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \alpha)}} \quad (34)$$

$$\text{其中 } \beta = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{W_\varphi}{W_z} \right)$$

若假定  $\eta$ ,  $\mu$  均很小, 而且  $\beta$  角小于  $\alpha$  之半, 则  $\operatorname{tg}^2 \beta$  也可以略去, 则得  $\lambda \approx \alpha$ , 故此用流道的半锥角来估计后掠角的大小是很方便的。

值得注意的是由于实际叶片是扭转, 变弦长的, 故前缘、中心线和后缘所对应的后掠角都是不同的。故上述  $S_1$  流面计算求解叶轮机械后掠现象亦只能是一种近似解。

综上所述可知, 回转  $S_1$  流面解, 在叶片的展弦比趋于零时是准确的, 故在离心式叶轮机械和轴流机械的末级, 采用回转  $S_1$  流面解是较好的近似。同时以  $W^2 \leq C^2$  作为判断堵塞现象是合理的。

当叶片展弦比趋于无穷大时, 后掠叶栅理论是准确的。在轴流式压气机的前几级或风扇中, 由于展弦比较大, 流道的锥度大, 后掠效应越来越显著, 必须充分加以考虑。但由于展弦比总是有限的。端面效应显著, 造成求解复杂化。特别是超音速情况下, 带来了重大的困难。采用后掠叶栅理论虽能有所改进, 但无法求出准确解。对于根部截面

(或顶部), 传统的回转面解依然可以提供较好的近似。

另外, 在叶片前缘, 由于当地的 $\eta$ ,  $\mu$ 角比叶片中心线处要大, 故当地后掠角较大。在跨、超音速情况下, 使得来流垂直于叶片前缘的分速减小。往往可能在低超音速来流时, 垂直分速是亚音的, 因此不要求来流满足“唯一攻角”条件, 这对于跨、超音速压气机的设计和变工况特性是有利的。

## 结 语

利用流面理论, 通过 $S_1$ — $S_2$ 流面交叉迭代来求解叶轮机械中的复杂三维流动, 是一个十分引人注目的课题。把三维方程分解成两个二维方程的迭加, 从而使计算大大简化, 但同时带来了等价性和收敛性问题。

在亚音速情况下, 目前尚未见到关于流面迭代解的收敛性或发散性的论证(包括数学分析或计算分析)。从工程角度来看, 流面理论是行之有效的。

在跨、超音速情况下, 目前主要的设计方法是在通流计算(平均 $S_2$ 流面的反问题)的基础上采用回转面上半经验的几何造型法。无论从理论和实验的角度来看, 对于整个三维流场的了解还是很不够的, 特别是关于激波的研究和分析计算也刚刚开始。深入剖析三维跨、超音速流场, 对于提高压气机的性能有重要的意义。利用流面迭代理论来处理这个问题, 同样是令人瞩目的。但从上述分析看, 流面迭代理论在跨、超音速情况下可能遇到一定的困难。除了激波造成流面的突然折转, 流面参数产生跳跃外, 关键问题是把三维流动分割成流面后, 由于求解是在各个流面上独立进行的, 故它们之间的联系太薄弱, 妨碍了信号的直接传递。因此目前的流面交叉解是难于收敛到准确的三维解的。这个矛盾是由于三维双曲型方程分解为两个二维方程缺乏严密的论证。众所周知, 只有在无限长后掠直叶栅情况下, 无粘性气体流动的三维方程才严格地退化为二维方程。从数学上来说, 这是由于无限长的对称性; 从实践上来说, 这也是无数实验证明的。但在一般情况下(有限叶栅, 有粘性等), 这种严格的退化现象是不存在的, 这时的二维解只能是一种近似, 其近似程度的好坏应按具体情况分析。实质上,  $S_1$ 和 $S_2$ 流面是紧密相联的, 流面理论的近似性突出地反映在 $S_1$ 流面上, 但在 $S_2$ 流面上也有反映。如叶片的进口区和槽道区流场特点有所不同, 企图用统一的 $S_2$ 流面方程来描述就会有一定的困难。正因为跨、超音速情况下, 流面理论是一种近似解, 故采用何种方程来处理为好, 也只是相对的。

过去由于计算技术的限制, 外部流动和内流气动力学是沿着不同途径发展的。在外流计算中曾广泛使用小扰动线化理论。而在内流计算中, 由于边界条件复杂、小扰动线化理论难于直接使用, 流面理论应运而生。但由于计算技术的发展, 直接求解非线性偏微分方程已成为现实。计算流体力学的发展使外流和内流的分家现象逐步消失。相信今后在继续研究发展流面理论的同时, 直接求解三维跨、超音速流场的时间相关法和跨音松弛等方法将充分发挥其作用。

### 附录 1

#### 直角坐标系中的流面理论(摘要)

流面理论原则上适用于各种二维, 三维的坐标系。对于三维直角坐标系, 在引入流面厚度  $\Omega$  和流面法向量  $\vec{n}$  后, 同样可得相应的方程组。

正问题, 给定  $\Omega$  和  $\vec{n}$ , 有:

$$\frac{\delta}{\delta x} \Omega \rho u + \frac{\delta}{\delta y} \Omega \rho v = 0$$

$$u \frac{\delta u}{\delta x} + v \frac{\delta u}{\delta y} - \frac{n_y}{n_z} \left( n \frac{\delta w}{\delta x} + v \frac{\delta w}{\delta y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\delta P}{\delta x} = 0$$

$$u \frac{\delta v}{\delta x} + v \frac{\delta v}{\delta y} - \frac{n_y}{n_z} \left( u \frac{\delta W}{\delta x} + v \frac{\delta W}{\delta y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta y} = 0$$

$$u \frac{\delta H}{\delta x} + v \frac{\delta H}{\delta y} = T u \frac{\delta S}{\delta x} + T v \frac{\delta S}{\delta y}$$

其中  $W = -\frac{n_x}{n_z} u - \frac{n_y}{n_z} v$

反问题, 给定  $\Omega$  及  $z$  向分速  $W$ , 有:

$$\frac{\delta}{\delta x} \Omega \rho u + \frac{\delta}{\delta y} \Omega \rho v = 0$$

$$u \frac{\delta}{\delta x} + v \frac{\delta u}{\delta y} + \left( u \frac{\delta W}{\delta x} + v \frac{\delta W}{\delta y} \right) \frac{\delta z}{\delta x} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} = 0$$

$$u \frac{\delta v}{\delta x} + v \frac{\delta v}{\delta y} + \left( u \frac{\delta W}{\delta x} + v \frac{\delta W}{\delta y} \right) \frac{\delta z}{\delta y} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta y} = 0$$

$$u \frac{\delta H}{\delta x} + v \frac{\delta H}{\delta y} = T u \frac{\delta S}{\delta x} + T v \frac{\delta S}{\delta y}$$

$$u \frac{\delta z}{\delta x} + v \frac{\delta z}{\delta y} = W$$

不难证明, 正问题的方程组在  $u^2 + v^2 + W^2 > C^2$  时为双曲型, 而反问题在  $u^2 + v^2 > C^2$  时为双曲型。

同样可以导出平面流线法的方程 (略)。

## 附录 2

叶片中心线在子午面后倾  $\eta$  角时的  $S_1$  流面理论 (摘要)

在子午面上引入图 4 所示的  $(r, n)$  坐标。在引入流面厚度  $\Sigma$  后, 可得  $S_1$  流面方程组为:

$$\frac{\delta}{\delta \varphi} \Sigma \rho W_\varphi + \frac{\delta}{\delta n} \Sigma \rho r W_z = 0$$

$$\frac{W_\varphi}{r} \frac{\delta W_\varphi}{\delta \varphi} + W_n \frac{\delta W_\varphi}{\delta n} + \frac{1}{r} \frac{\delta L}{\delta \varphi} \left[ \frac{W_\varphi}{r} \frac{\delta W_\varphi}{\delta \varphi} + W_n \frac{\delta W_\varphi}{\delta n} - \frac{(W_\varphi + \omega r)^2}{r} \right]$$

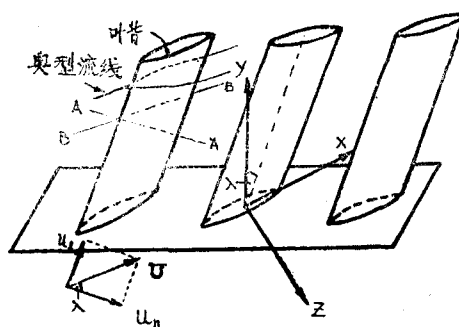


图 4



$$\cos\eta \left. \vphantom{\frac{1}{\rho r} \frac{\delta p}{\delta \varphi}} \right\} + \frac{1}{\rho r} \frac{\delta p}{\delta \varphi} + \left( \frac{W_\varphi}{r} + 2\omega \right) (W_t \cos\eta - W_n \sin\eta) = 0$$

$$\frac{W_\varphi}{r} \frac{\delta W_n}{\delta \varphi} + W_n \frac{\delta W_n}{\delta n} + \frac{\delta l}{\delta n} \left[ \frac{W_\varphi}{r} \frac{\delta W_t}{\delta \varphi} + W_n \frac{\delta W_t}{\delta n} - \frac{(W_\varphi + \omega r)^2}{r} \right.$$

$$\left. \cos\eta \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta n} + \frac{(W_\varphi + \omega r)^2}{r} \sin\eta = 0$$

$$\frac{W_\varphi}{r} \frac{\delta I}{\delta \varphi} + W_n \frac{\delta I}{\delta n} = \frac{TW_\varphi}{r} \frac{\delta s}{\delta \varphi} + TW_n \frac{\delta S}{\delta n}$$

$$W_\varphi \frac{\delta l}{r \delta \varphi} + W_n \frac{\delta l}{\delta n} = W_t$$

不难证明, 方程组在  $W_\varphi^2 + W_n^2 > C^2$  时为双曲型。

### 参考文献

- [1] 吴仲华, NACA TN 2604 (1952)
- [2] 黄瑞新, 超音速流面理论的一些问题, 力学情报, 1976年第2期
- [3] Silvester, M.E., & Fitch, C.M., Matrix Methods for the Design of Cascades to prescribed Surface Velocity Distribution and for Fully Compressible Flow, NASA SP304, (1975)。
- [4] 计算所三室, 用流线迭代法求解叶轮机械的气动问题 (1976)。
- [5] Courant, R., Hilbert, D., The Methods of Mathematical Physics, Vol I, (1962)。
- [6] Roache, J., Computational Fluid Dynamics, (1972)。
- [7] Oliver, D.A., and Sparis, P., Computational Aspects of the Prediction of Multidimensional Transonic Flows in Turbomachinery, NASA N76-10026。
- [8] Smith, L.H., Yeh, H., Sweep and Dihedral Effects in Axial-Flow Turbomachinery, Trans. of ASME, Series D, J. of Basic Engin. Vol 85 (1963)。
- [9] Jones, R.T. et al, Aerodynamics of Aircraft at High Speeds, (Aerodynamic Components of Aircraft at High Speeds, Donovan, A.F. ed.)。