学术
讨论

编者按：遵照毛主席的“**百花齐放，百家争鸣**”的方针，本刊从这一期起开辟“学术讨论”专栏，发表不同的学术见解，以启发思路，活跃学术气氛，促进科研发展。热烈欢迎同志们将工作、学习中的经验总结、新见解、新设想等随时来稿。

《对叶轮机械气动力学方程在应用中的一些意见》，讨论了如何考虑实际气体的粘性作用等问题，随着叶轮机械气动理论和设计方法的发展，这一问题已引起广泛重视。

《流面理论探讨》，讨论了随着叶轮机械内部超、跨音速流动的实际应用，怎样判断流面上的流动性质，从而采用不同的数学解法，以及在流面上怎样判断超音速流动的问题。

# 对叶轮机械气体动力学方程在应用中的一些意见*

力学所　　王应时　薛明伦

随着电子计算机的迅速发展，在叶轮机械设计中已广泛采用了三元流动的计算模型。在目前已有的理论中大都是从理想气体出发推得三元流动的气体动力学方程组，这方面以文献〔1〕的工作为代表。但随着叶轮机械的发展需要，对气体流动因粘性引起的影响必需在设计中加以考虑。由于实际的粘性流动的气体动力学方程组比较复杂，要想得到完整的解存在着较大的困难，因而目前考虑粘性影响都是通过理想流体方程组而给定熵增量来近似地考虑，在实际计算中已在实行[2],[3],[4]。这样的解决办法在一定条件下是不够完善的，值得进一步讨论。另外考虑到随着叶轮机械气体动力学理论的逐步发展，有些文献提出了一些简化处理，对于这方面也提出一些我们的看法。

到目前为止对于理想气体流动而言，文献[1]提出的方程组和二组流面的概念是比较全面和完善的，尤其$S_2$流面的计算，在轴流式叶轮机械设计中更为重要，它涉及各截面叶型的叠合、级与级之间功的分布以及流道形状的选择。$S_1$流面相对来讲比较独立地可以从平面或环形叶栅理论和实验数据中得到。至于文献[2],[3],[4]有的是基于[1]的方程和概念作了一些在计算过程中考虑熵的处理[2]，有的则从流线曲率出发推得三元流动的气体动力学方程组，并考虑了熵的问题[3],[4]。但应该指出文献〔3〕在推导径向平衡方程时应用了轴对称的条件，由于没有按$S_2$流面概念出发，因此方程中没有$F_r$。这样的处理一般说来概念上有混淆，而在数值计算上对压气机误差不太大，而对于透平

*1975年5月收到

就带来较大的误差。关于这个问题文献〔5〕已有详细阐述。总的来讲这些文献都是在理想气体作绝热流动假定下推得的方程组，而在考虑粘性影响时又都是通过沿流线给定熵的分布来处理，关于这一点我们提出下列的分析和讨论。

L、Crocco于1937年推得下列方程：

$$-\vec{V}\times(\nabla\times\vec{V})=T\nabla S \tag{1}$$

它是当进口流场为均能的理想气体沿流线作绝热稳定流动时，应用Euler方程后推导得到[6]，后来把式（1）推广为下列形式：

$$\vec{V}\times(\nabla\times\vec{V})=\Delta i_o-T\Delta S \tag{2}$$

它适用于理想气体作非绝热的稳定流动（当然，这里所谓非绝热只是对应于外界加热效应或化学反应产生的加热效应，也包括理想流体中流线和流线之间的传热），是运动方程的另一种形式，现已被广泛用来分析气体的运动过程。

从上式可以清楚看出，向量（$\nabla i_o-T\nabla S$）是垂直于流动方向的，因此若理想气体作绝热稳定流动时，则整个流场必定满足下列条件[6] [7]：

$$\frac{\partial i_o}{\partial\sigma}=0,\quad\frac{\partial S}{\partial\sigma}=0$$

换言之，对于理想气体作绝热稳定流动时，若要应用式（2）来分析，那末流场一定要满足$\frac{\partial S}{\partial\sigma}=0$——即沿流线是可逆的绝热流动——的条件，否则数学逻辑上会引起矛盾。这一点文献〔1〕也指出，在应用理想流体的方程组时$T\frac{dS}{dt}=Q$，而Q只是系统外加入的热。

在文献〔2〕、〔3〕、〔4〕中把式（2）用来分析有粘性的绝热稳定流动，它们的处理概念是把因摩擦产生的热量通过传热仍送回到气体内，因此对每根流线讲仍可视为绝热的，但应该看清，这时已不是可逆的绝热流动，即$\frac{\partial S}{\partial\sigma}\neq0$，而经向方程仍作为无粘性来考虑，所以只用了方程（2）的径向分量部分。

当然，在这些文献中主要是沿流线给定熵的变化，这样做的结果事实上是放弃了理想气体运动方程组中轴向的分方程。就以子午面上计算为例，目前一般是用理想气体的严格径向平衡方程，但沿径向的熵是给定的，或者是通过速度系数、叶片效率、压力损失系数等沿流线的变化与熵联系起来。这样的处理实际上已放弃了原来方程（2）在轴向的分方程，因此在解的过程中就多了一个自由度，或者说由代表摩擦损失的熵增量的已知表达$\overline{\omega}$来替代。就是说径向仍按无粘性来处理，而轴向则看作是有粘性的。这当然是一种近似的处理方法，但作为计算来说并不会产生矛盾。

至于所谓简单径向平衡的计算方法，以及规定流线的计算方法（包括锥形流或者规定流线波动的形状。）除了上述假定外，都是在牺牲流场中每一点满足连续方程的条件下而增加了在解问题中的又一个自由度，也就是还可以允许规定流线的形状。因此像这类的简化方法就是更进一步的近似了。

从上述分析可以清楚看出，如果要严格地按理想流体三元流动来解运动方程（2），

如文献〔1〕所做的那样，当要沿流线保持绝热时 $\left(\frac{\partial i_0}{\partial \sigma}=0\right)$，只能沿流线是等熵的 $\left(\frac{\partial S}{\partial \sigma}=0\right)$。如果要同时沿流线保持绝热，又要沿流线熵有变化，那末要完整地去解方程（2）是存在矛盾的，一定无法解出。

如果要保持严格的从三元流动概念出发，同时又要考虑粘性力的影响，而且要适于在叶轮机械设计中求解应用，我们认为可以沿流线（或流管）借用管道内流体流动时的摩擦损失概念在式（2）内添上粘性力项：

$$\vec{V}\times(\nabla\times\vec{V})=\nabla i_0-T\nabla S-\vec{F}_\tau \qquad (3)$$

其中 $\vec{F}_\tau=-\frac{4f}{D}\cdot\frac{V^2}{2}\cdot\frac{\vec{V}}{V}$ 　　而 $f=\frac{\tau\omega}{\rho\frac{V^2}{2}}$，$D=2h$（对于长叶片可以近似地看作水力直径等于叶片通道的两倍。）

上面分析中是把粘性力想象为一个体积力作用在流体微团上[8]，这就象有粘性的一元流动的处理一样[9]，因而它还不是真正的粘性运动方程。

对式（3）两边进行 $\vec{V}$ 的数性积，则得：

$$\vec{V}\cdot T\nabla S=-\vec{V}\cdot\vec{F}_\tau$$

这说明沿流线熵的增加即是由于流线方向的粘性力存在所引起。

通过这样的处理，不仅可以完整地解方程（3），而且可以避免解严格的粘性方程（Navier—Stokes方程）的困难。虽然仍保持沿流线绝热的条件，（这条件对叶轮机械设计是重要的。）但这时沿流线又不必一定要 $\frac{\partial S}{\partial \sigma}=0$ 的条件。

同时我们以为文献〔1〕提出的二组流面的概念是比较好的，还是可以采用。因此考虑了粘性力后，可以把文献〔1〕和〔8〕的结果结合起来，以 $S_2$ 流面为例的运动方程应为：

$$-\frac{V_u}{r}\frac{\overline{\partial}(V_u r)}{\overline{\partial} r}+V_z\left(\frac{\overline{\partial}V_r}{\overline{\partial}Z}-\frac{\overline{\partial}V_z}{\overline{\partial}r}\right)=-\frac{\overline{\partial}i_0}{\overline{\partial}r}+\frac{T\overline{\partial}S}{\overline{\partial}r}+F_r+(F_\tau)_r$$

$$\frac{V_r}{r}\frac{\overline{\partial}(V_u r)}{\overline{\partial} r}+\frac{V_z}{r}\frac{\overline{\partial}(V_u r)}{\overline{\partial} r}=F_u+(F_\tau)_u \qquad (4)$$

$$-V_r\left(\frac{\overline{\partial}V_r}{\overline{\partial}z}-\frac{\overline{\partial}V_z}{\overline{\partial}r}\right)-\frac{V_u}{r}\frac{\overline{\partial}(V_u r)}{\overline{\partial}z}=-\frac{\overline{\partial}i_0}{\overline{\partial}z}+\frac{T\overline{\partial}S}{\overline{\partial}z}+F_z+(F_\tau)_z$$

**（上式中的偏导数都是沿流面取的）。**

其中 $\vec{F}=-\frac{1}{n_u r}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\vec{n}$，$\vec{F}_\tau=-\frac{4f}{D}\cdot\frac{V^2}{2}\cdot\frac{\vec{V}}{V}$

在相对运动座标上也有类似的写法，在这里就不重复了。在实际数值计算过程中，$\vec{F}_\tau$ 和 $\vec{F}$ 的处理一样，每次迭代过程中用上一次计算到的速度值来规定。

## 符 号 说 明

V　绝对速度

P　压强

T　温度

S　熵

$i_o$　滞止焓

σ　流线方向

$F_\tau$　由粘性力折算成的单位质量体积力

F　导出量，量纲和单位质量所受的力相同

f　摩擦系数

D　水力直径

$\tau_\omega$　壁面剪切应力

h　两叶片间通道的宽度

r,u,z　园柱座标中的径向、周向、轴向

φ　角座标

## 参 考 文 献


〔1〕Wu Chung Hua, A General Theory of Three—Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial—, Radial—, and Mixed-Flow Types, NACA Tech, -Note 2604 (1952).

〔2〕Marsh, H., A Digifal Compufer Program for the Through-Flow Fluid Mechanics in an Arbifrary Turbomachine using a Matrix Metbod, ARC R¢M №3509 (1968).

〔3〕Norak, R.A., Sfreamline Curvature Computing Procedures for Fluid-Flow Problems, Trans. ASME, Power, Oct., (1967).

〔4〕Smith, L. H.Jr., The Radial-Eguilibrium, Eguation of Turbomachinery, Trans. ASME, Power, Jan., (1966).

〔5〕薛明伦、刘高联，轴流式叶轮机械气流径向平衡近似计算中的动量方程，机械工程学报，（1963年3月）.

〔6〕Crocco, L., Eine neue Sfromfunktion fuer die Erforschung der Bewegung der Gase nrit Rotafion, Zeit. fuer Angew Math and Mech, Feb., (1937).

〔7〕钱学森，气体动力学诸方程（中译本），41（1966年）.

〔8〕Horlock, J. H., On Enfropy Production in Adiabatic Flow in Turbomachines, Trans. ASME, Basic Engineeing, Dec., (1971).

〔9〕Shapiro, A.H., The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow The Ronald Press Co.163 (1953).