

任意回转面上, 可压缩轴流式 叶栅损失的理论计算方法

力学所五室 邹滋祥

摘 要

本文提供了在任意回转面上, 用叶栅出气边上边界层特征参数表示的可压缩流动轴流式叶栅形面动能损失系数, 形面摩擦系数, 包含叶栅下游掺混损失在内的总的动能损失系数以及尾迹掺混损失系数的理论计算方法。本文的第一部分推导了上述各种损失系数的数学表达式。第二部分推导了任意回转面上回转叶栅包含离心力影响在内的可压缩紊流边界层的冲量积分方程以及通过Mangler变换所得到的轴对称旋成体表面紊流边界层的冲量积分方程, 并发现了两者之间流动的相似性。通过这两类边界层流动相似的比拟方法, 找到了它们之间解的变换关系。第三部分详细地叙述了一个平面可压缩紊流边界层解的方法和具体的计算步骤。最后通过manglers以及上述的变换关系可以得到任意回转面上, 可压缩回转叶栅紊流边界层特征参数以及上述各种损失系数的计算方法。

符 号 说 明

- δ 边界层厚度
- δ^* 位移 (或排挤) 边界层厚度
- θ 冲量损失厚度
- e 能量损失厚度
- H_{12} 形参数 $H_{12} = \delta^*/\theta$
- H_{32} 形参数 $H_{32} = e/\theta$
- H_{02} 形参数 $H_{02} = \delta/\theta$
- S 叶栅的线性栅距
- $\Delta\varphi_s$ 叶栅的角栅距
- t 出气边厚度
- B 叶栅的轴向宽度
- r_c 旋成体表面曲率半径
- τ 任意回转面上的流片厚度
- W 流体速度
- λ 流体的速度系数为 W/W_0 之比

- β 流体速度与子午面的夹角
 ρ 流体的密度
 $\bar{\xi}_{型}$ 型面动能损失系数
 $\bar{\xi}_{摩}$ 型面摩擦系数
 $\bar{\xi}_{总}$ 总的动能损失系数
 $\bar{\xi}_{尾}$ 尾迹掺混动能损失系数
 E 单位重量流体之动能
 \sim
 \bar{E} 质量平均后单位重量流体之动能
 F 由公式 (28) 定义
 Δ 运载厚度, 由公式 (29) 定义
 G_f 局部阻力系数
 M 当地马赫数
 T 温度
 R_θ 建筑在冲量厚度基础上的雷诺数 $R_\theta = \frac{W \cdot \theta}{\nu}$
 μ 粘性系数
 p 静压力
 W 流体在边界层内的纵向速度
 v 边界层内的横向速度
 x 描写边界层的纵向坐标
 y 描写边界层的横向坐标

注 脚

- O' 表示在 $O'-O'$ 站上的量
 O 表示在 $O-O$ 站上的量
 1 表示在 $1-1$ 站上的量
 2 表示在 $2-2$ 站上的量
 l 表示在流动方面的量
 Z 表示叶栅轴向的量
 n 表示垂直于边界上流体的参量
 e 表示边界层作边界上自由流体的参量
 m 平均或中间量
 l 在总温恢复系数下的量
 ω 在壁面上的量
 tot 表示叶背和叶盆上边界层特征参量之总和
 ful 表示边界层的全厚度
 f 代表边界层外边界上的自由流体的参量
 “ \sim ” 表示平均量
 “ $-$ ” 表示在平面上或相对量
 (其它符号在文中有定义)

引 言

随着近代科学技术的发展,对叶片机械提出了进一步提高性能,减轻机组重量和缩小体积的要求。通过大量的试验与分析研究,认为提高流体在叶片内部的流动速度,增加级的负荷是一种可能的途径,为了有效地提高叶片内部的流动速度,在叶栅设计中仅考虑无粘性位流的理论计算已经不能满足要求了。为了正确地判别理论设计出来的叶栅性能的好坏,必须对流体粘性存在所引起的各种损失有详细的了解(如果是超、跨音速的流动,还必须考虑激波引起的一系列问题),如粘性流体通过叶栅通道时与壁面摩擦而产生的动能(或总压)损失,由于叶栅出口边上流动的不均匀,在下游尾迹区内进行掺混所引起的动能(或总压)损失以及这两种损失之和的总动能(或总压)损失。要解决这类损失的理论计算问题,首先必须对叶栅表面的边界层流动有所研究。对于平面叶栅的损失计算问题已经有不少作者在这方面作了很多工作。如用边界层特征参数来表示的二元不可压流动叶栅总压损失的有文献〔1〕,计算二元可压缩流动叶栅总压损失的有文献〔2〕,文献〔3〕也给出了它的理论计算和实验数据。但到目前为止,对于任意回转面上可压缩流动回转叶栅的各种损失的完整的理论计算方法还很少见到。它的困难并不在于推导这类损失的数学表达式本身,而是边界层特征参数值的计算问题。因为目前对任意回转面上可压缩流动回转叶栅边界层的精确测量还存在着很大的困难。

本文的目的是想解决这类叶栅的边界层特征参数和损失的理论计算问题。它的具体途径是找出各类边界层解的相互变换关系,通过这些关系把目前二元平面叶栅边界层的研究成果直接应用到任意回转面上去。这是一种多快好省的方法,并且取得了一定的结果。

本文的主要工作是和stewartson〔4〕找出了层流边界层的可压缩性变换关系,mager〔5〕的紊流边界层可压缩性变换关系以及mangler的平面与轴对称旋成体表面边界层之间的变换关系或mager's和mangler's联合变换关系〔6〕那样找到了轴对称旋成体表面可压缩流动紊流边界层与任意回转面上可压缩流动轴流式环形叶栅以及回转叶栅表面紊流边界层解之间的变换关系。

这样就可以很方便地把平面不可压或可压缩流动紊流边界层的解,通过文献〔5〕,〔6〕中提供的方法联合本文所提供的变换关系转换到任意回转面上去了。有了上述边界层的特性参数值,任意回转面上轴流式叶栅的各类损失的理论计算问题也就可以解决了。

为此,本文还在文献分析比较的基础上系统地整理和阐述了一个平面可压缩流动紊流边界层解的方法和具体的计算步骤。从而提供了一个计算任意回转面上可压缩流动轴流式叶栅各种损失计算的完整方法和具体步骤。

二、任意回转面上，可压缩流动回转 叶栅动能损失系数的计算方法

1. 基本假定

(a) 流过叶栅的流体是稳定、可压缩、有粘性的牛顿流体（即满足应力张量与形变张量之间的线性关系）；

(b) 来流的进口与出口经完全掺混以后的流动沿栅距方向是均匀的；

(c) 流动中不出现激波，并且是充分发展了的紊流流动；

(d) 流动是在任意回转面上，叶栅的进、出口处的线性栅距不等，但角栅距 $\Delta\varphi$ 相等并满足线性栅距 $S = \Delta\varphi \cdot n$ 的关系；

(e) 在边界层特征参数的计算中满足边界层理论中所作的一切近似假定以及边界层厚度与壁表面曲率半径相比可以忽略的假定。在任意回转面上叶栅的边界层仍垂直于叶型表面，并且仍可以用 (x, y) 直角坐标来描写的二元边界层。

2. 基本方程的推导

在基本方程的推导中，为直观起见借用 (φ, l) 坐标展开图(1)来作辅助说明。

(a) 一些说明：

$O'-O'$ 站：

在此站上，来流参数沿栅距 $\Delta\varphi$ 是均匀的，并且进气速度 $W_{o'}$ 和方向 $\beta_{o'}$ 是已知的。

1—1站：

此站位于叶栅的出气边上，并假定粘性流体通过叶型上、下表面所形成的边界层在这里开始分离并脱离叶片。叶型上、下表面边界层外边界上自由流速 W_{p1r} 和 W_{s1r} 相等，边界层内跨过垂直于流体方向的静压力 P_1 和总温 T_1^* 是常数，出气边相对厚度 δ^* 内沿有流体流过，这里的静压 P_1 ，流体与轴向夹角为 β_1 ，线性栅距 $S_1 = \Delta\varphi \cdot r_1$ 。并假定自由流跨过栅距是取的质量平均值 \tilde{W}_{1r} ， $\tilde{\beta}_1$ 。

2—2站：

此站位于叶栅下游足够远处，这里的掺混已经完成，各种参数在栅距内已经达到均匀。

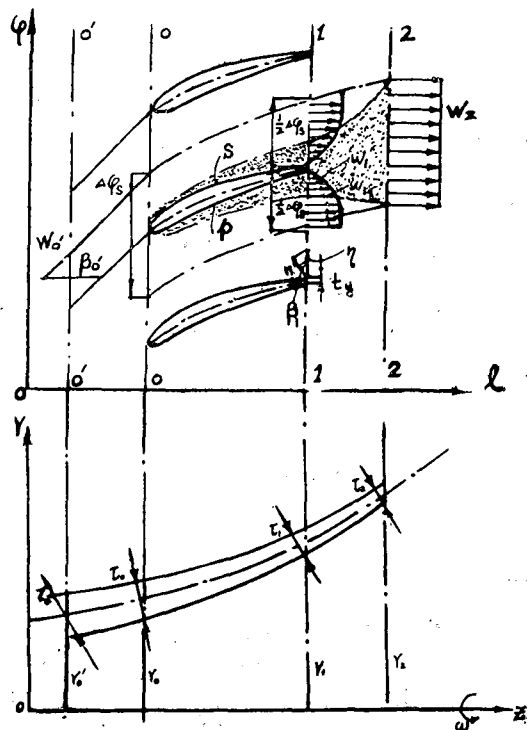


图1 回转面上的叶栅展开示意图

(b) 边界层特征参数的定义和数学表达式:

本文所用的边界层特征参数有下列几种:

①位移(或排挤)边界层厚度 δ^* :

它是粘性流体流过叶栅通道时边界层内重量流量减少的量度。它的数学表达式如下:

$$\delta^* \cdot \rho_f \cdot W_f = \delta_{f_{0.995}} \cdot \rho_f \cdot W_f - \int_0^{\delta_{f_{0.995}}} (\rho W) dy$$

$$\therefore \delta^* = \delta_{f_{0.995}} - \int_0^{\delta_{f_{0.995}}} \left(\frac{\rho W}{\rho_f W_f} \right) dy \dots \dots \dots (1)$$

其中 $\delta_{f_{0.995}}$ 是边界层全厚度, 定义在边界层内速度 $W = 0.995 W_f$ 时的边界层厚度 $y = \delta_{f_{0.995}}$ 。

②冲量损失厚度 θ :

它是粘性流体和叶栅壁面因摩擦而引起的冲量损失的量度。它的数学表达式如下:

$$\theta \cdot \rho_f \cdot W_f \cdot W_f = W_f \cdot \int_0^{\delta_{f_{0.995}}} (\rho W) dy - \int_0^{\delta_{f_{0.995}}} (\rho W^2) dy$$

$$\therefore \theta = \int_0^{\delta_{f_{0.995}}} \left(1 - \frac{W}{W_f} \right) \left(\frac{\rho W}{\rho_f W_f} \right) dy \dots \dots \dots (2)$$

③能量损失厚度 e :

它是粘性流体与壁面因摩擦而产生的动能损失的量度。它的数学表达式如下:

$$e \cdot \frac{1}{2} \rho_f \cdot W_f^3 = \frac{1}{2} W_f^2 \int_0^{\delta_{f_{0.995}}} (\rho W) dy - \frac{1}{2} \int_0^{\delta_{f_{0.995}}} (\rho W^3) dy$$

$$\therefore e = \int_0^{\delta_{f_{0.995}}} \left[1 - \left(\frac{W}{W_f} \right)^2 \right] \left(\frac{\rho W}{\rho_f W_f} \right) dy \dots \dots \dots (3)$$

④各种型参数的表达式与它们之间的关系:

形式参数

$$H_{02} = \frac{\delta}{\theta} \dots \dots \dots (4_a)$$

$$H_{12} = \frac{\delta^*}{\theta} \dots \dots \dots (4_b)$$

$$H_{32} = \frac{e}{\theta} \dots \dots \dots (4_c)$$

对于单参数族指数速度剖面的有文献〔1〕

$$H_{32} = \frac{H_{12} + 1}{3H_{12} - 1} \dots \dots \dots (4_d)$$

文献〔15〕给出了下面的关系式:

$$H_{32} = \frac{1.272H_{12} + 5.4 \left(\frac{H_{12}}{10} \right)^4}{H_{12} - 0.37} \dots \dots \dots (4_e)$$

当 $H_{12} = 1.4$ 时 $H_{32} = 1.73$ 。

(c) 各种参数的无因次化：
长度尺寸用叶栅的轴向宽度 B 来除

$$\bar{n} = n/B; \quad \bar{\tau} = \tau/B; \quad \bar{S} = S/B; \quad \bar{\theta} = \theta/B; \quad \bar{t}_n = t_n/B; \quad \bar{\delta}^* = \delta^*/B;$$

$$\bar{e} = e/B; \quad \bar{y} = y/B. \dots\dots\dots (5.)$$

速度都用进口来流速度 $W_{o'}$ 来除并用 λ 来表示：

$$\lambda_{o'} = \frac{W_{o'}}{W_{o'}} = 1; \quad \lambda = \frac{W}{W_{o'}} \dots\dots\dots (5.)$$

边界层特征参数再用相应的相对线性栅距 \bar{S} 来除，则在出气边上的对相边界层特性参数如下：

$$\bar{\delta}_{1,0}^* = \frac{\bar{t}_n}{\bar{S}_1 \cdot \cos\beta_1}; \quad \bar{\delta}_1^* = \frac{\bar{\delta}_{1,10}^*}{\bar{S}_1 \cdot \cos\beta_1} = \frac{\bar{\delta}_{1,1}^* + \bar{\delta}_{1,p}^*}{\bar{S} \cdot \cos\beta_1};$$

$$\bar{\theta}_{1,1}^* = \frac{\bar{\theta}_{1,10}^*}{\bar{S}_1 \cdot \cos\beta_1} = \frac{\bar{\theta}_{1,1}^* + \bar{\theta}_{1,p}^*}{\bar{S}_1 \cdot \cos\beta_1}; \quad \bar{e}_1^* = \frac{\bar{e}_{1,10}^*}{\bar{S}_1 \cdot \cos\beta_1} = \frac{\bar{e}_{1,1}^* + \bar{e}_{1,p}^*}{\bar{S}_1 \cdot \cos\beta_1} \dots\dots\dots (6.)$$

$$\text{其中 } \bar{t}_n = \bar{t}_n \cdot \cos\beta_1; \quad \bar{\theta}_{1,10}^* = \bar{\theta}_{n,10}^* \cdot \cos\beta_1;$$

$$\bar{\delta}_1^* = \bar{\delta}_{n,10}^* \cdot \cos\beta_1; \quad \bar{e}_1^* = \bar{e}_{n,10}^* \cdot \cos\beta_1 \dots\dots\dots (6.)$$

$$\bar{H}_{12}^* = \bar{H}_{12,10}^* = \frac{\bar{\delta}_{1,10}^*}{\theta_{1,10}^*} = \frac{\bar{\delta}_{1,1}^* + \bar{\delta}_{1,p}^*}{\theta_{1,1}^* + \theta_{1,p}^*};$$

$$\bar{H}_{32}^* = \bar{H}_{32,10}^* = \frac{\bar{e}_{1,10}^*}{\theta_{1,10}^*} = \frac{\bar{e}_{1,1}^* + \bar{e}_{1,p}^*}{\theta_{1,1}^* + \theta_{1,p}^*} \dots\dots\dots (6.)$$

(d) 质量平均型面动能损失系数 $\bar{\xi}$ 型。

粘性流体流过叶栅表面时因摩擦和转折使流体中一部分宏观运动的能量变成微观的分子运动内能，这部分宏观运动的能量称为型面动能损失 ΔE ，它与站 2 上理想无粘性流动时流体动能 E_{2i} 之比定义为型面动能损失系数 $\bar{\xi}$ 型，它的数学表达式如下：

$$\bar{\xi}_{\text{型}} = \frac{\Delta E_1}{E_{2i}} = \frac{\tilde{E}_{1f} - \tilde{E}_1}{E_{2i}} \dots\dots\dots (7)$$

其中 \tilde{E}_1 是在站一上质量平均后单位粘性流体的动能， \tilde{E}_{1f} 是自由流体质量平均后单位重量流体的动能。把方程 (7) 用质量平均展开后得下式：

$$\bar{\xi}_{\text{型}} = \frac{\int_{-\frac{1}{2}S_1}^{+\frac{1}{2}S_1} \left(\frac{\bar{E}_{1f} - E_1}{E_{2f}} \right) \cdot \left(\frac{\rho_1 W_1}{\rho_{2f} \cdot W_{2f}} \right) \cdot \cos \tilde{\beta}_1 \cdot d\bar{\eta}}{\int_{-\frac{1}{2}S_1}^{+\frac{1}{2}S_1} \left(\frac{\rho_1 W_1}{\rho_{2f} \cdot W_{2f}} \right) \cdot \cos \tilde{\beta}_1 \cdot d\bar{\eta}} \dots\dots\dots (8)$$

方程 (8) 用站一上的边界层特征参数来表达后可以推导出下面形式的型面动能损失系数表达式:

$$\bar{\xi}_{\text{型}} = \frac{\left(\frac{\tilde{\lambda}_{1f}}{\lambda_{2f}} \right)^2 \cdot \bar{e}_{1f}}{1 - (\delta^*_{1f} + \delta^*_{1e})} \dots\dots\dots (9)$$

在应用 (5), (6) 式后得

$$\bar{\xi}_{\text{型}} = \frac{\left(\frac{\tilde{\lambda}_{1f}}{\lambda_{2f}} \right)^2 \cdot \bar{e}_{1f}}{\bar{r}_1 \cdot \Delta \varphi_f \cdot \cos \tilde{\beta}_1 - (\delta^*_{1f} + \bar{t}_n)} \dots\dots\dots (A_9)$$

再应用 (4d) 或 (4e) 后就得到我们要求的 $\bar{\xi}_{\text{型}}$ 计算方法。

(e) 型面摩擦系数 $\bar{\xi}_{\text{摩}}$:

粘性流体通过壁面时因摩擦而产生的动能损失 ΔE 与出口边站 1 上作理想流体无粘性流动时单位流体动能之比, 定义为型面摩擦系数:

$$\bar{\xi}_{\text{摩}} = \frac{\bar{E}_{1f} - \bar{E}_1}{E_{1f}} \dots\dots\dots (10)$$

可以用同样的方法推导出

$$\bar{\xi}_{\text{摩}} = \frac{\bar{e}_{1f}}{1 - (\delta^*_{1f} + \delta^*_{1e})} \dots\dots\dots (11)$$

应用 (5), (6) 后得

$$\bar{\xi}_{\text{摩}} = \frac{\bar{e}_{1f}}{\bar{r}_1 \cdot \Delta \varphi_f \cdot \cos \tilde{\beta}_1 - (\delta^*_{1f} + \bar{t}_n)} \dots\dots\dots (12)$$

\bar{e}_{1f} 可以用 (4d) 或 (4e) 来表示。

(f) 总的平均动能损失系数 $\bar{\xi}_{\text{总}}$:

总的平均动能损失中包含型面和尾迹掺混能损失两部分。表达式如下：

$$\bar{\xi}_{\text{总}} = \frac{E_{2t} - \tilde{E}_2}{E_{2t}} = 1 - \frac{\tilde{E}_2}{E_{2t}} = 1 - \frac{\tilde{W}^2}{W^2} \dots \dots \dots (13)$$

通过用出气边上边界层特征参数表示后可以推导得到下面的表达式，见附录（二）
（B₀式）

$$\bar{\xi}_{\text{总}} = 1 - \left(\frac{\tilde{\lambda}_{1t}}{\lambda_{2t}} \right)^2 \cdot \left\{ \frac{\sin^2 \tilde{\beta}_1 \cdot [1 - (\bar{H}_{12}^* \cdot \bar{\theta}_{1t}^* + \bar{\theta}_{1t}^* + \delta_{1t}^*)]}{[1 - (\bar{H}_{12}^* \cdot \bar{\theta}_{1t}^* + \delta_{1t}^*)]^2} + \frac{\cos^2 \tilde{\beta}_1 \cdot [1 - (\bar{H}_{12}^* \cdot \bar{\theta}_{1t}^* + \delta_{1t}^*)]^2}{\left(\frac{\tau_2 S_2}{\tau_1 S_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{\rho_2}{\rho_{1t}} \right)^2} \right\} \dots \dots \dots (B_0)$$

应用方程（5）（6）后得：

$$\bar{\xi}_{\text{总}} = 1 - \left(\frac{\tilde{\lambda}_{1t}}{\lambda_{2t}} \right)^2 \cdot \left\{ \frac{\sin^2 \tilde{\beta}_1 \cdot [r_1 \cdot \Delta\varphi \cdot \cos \tilde{\beta}_1 - (\bar{H}_{12t} \cdot \bar{\theta}_{1t} + \bar{\theta}_{1t} + t_n)]^2}{[r_1 \cdot \Delta\varphi \cdot \cos \tilde{\beta}_1 - (\bar{H}_{12t} \cdot \bar{\theta}_{1t} + \bar{\theta}_{1t} + t_n)]^2} + \frac{\cos^2 \tilde{\beta}_1 \cdot [r_1 \cdot \Delta\varphi \cdot \cos \tilde{\beta}_1 - \bar{H}_{12t} \cdot \bar{\theta}_{1t} + t_n]^2}{\left(\frac{\tau_2 S_2}{\tau_1 S_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{\rho_2}{\rho_{1t}} \right)^2} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

方程（14）对于不可压流动，则 $\left(\frac{\rho_2}{\rho_{1t}} \right) = 1$ ，可以算得 $\bar{\xi}_{\text{总}}$ ，但对于可压缩流动 $\left(\frac{\rho_2}{\rho_{1t}} \right)$ 没有简单解析表达式，但可以用附录（四）中的方法来求得 $\bar{\xi}_{\text{总}}$ 。

（g）尾迹损失系数 $\bar{\xi}_{\text{尾}}$ ：

$$\bar{\xi}_{\text{尾}} = \bar{\xi}_{\text{总}} - \bar{\xi}_{\text{型}} \dots \dots \dots (15)$$

在方程（A₃），（12），（B₀），（14）中的 $\left(\frac{\tilde{\lambda}_{1t}}{\lambda_{2t}} \right)^2$ 见附录（三），它可以通过 O'—O' 和 2—2 站上的连续方程和 1—1，2—2 站上的动量矩守恒方程来得到，对于不可压流动则：

$$\lambda_{2t} = \left[\frac{\bar{\tau}_0' \cdot \bar{r}_0'}{\tau_2 \cdot r_2} \cdot (\cos \beta_0') \right]^2 + \left[(\tilde{\lambda}_{1t} \cdot \sin \tilde{\beta}_1 + \lambda_n) \cdot \frac{\bar{r}_1}{r_2} - \lambda_{2t} \right]^2 \dots \dots \dots (C_2) (16)$$

对于可压缩流动就没有象不可压流动那样有显式来表示，是一个复杂的求解过程，但可以求解叶栅流场结合起来。

三、各类边界层的冲量积分方程 与它们之间解的变换关系

1. 平面可压缩流动紊流边界层的冲量积分方程, 这个方程由文献〔9〕中推得:

$$\frac{d\bar{\theta}}{dx} + (2 + \bar{H}_{12} - \bar{M}^2_r) \frac{\bar{\theta}}{\bar{W}_r} \frac{d\bar{W}_r}{dx} = \frac{\bar{\tau} W}{\bar{\rho}_r \cdot \bar{W}_r^2} = \frac{\bar{C}_f}{2} \dots \dots \dots (17)$$

这里参数上面的“—”表示平面上的量。

2. 轴对称旋成体表面上可压缩流动紊流边界层的冲量积分方程:

这类冲量方程可以用(17)式通过mangler变换来得到: 这两类边界层之间的主要区别在于后者有表面横向曲率 $r_0(x)$ 的影响, 它们之间存在着某种关系, 只要找到这种关系就可以把平面上的解直接转换到轴对称旋成体表面上去了。这种关系是:

坐、标的变换如下:

$$\bar{x} = \int_0^x r_0(\xi) d\xi, \quad \bar{y} = r_0(x) \cdot y \dots \dots \dots (18)$$

有“—”者表示平面量。

在交换中保留了除横向速度 v 以外的所有其他流动参数

$$\bar{W} = W, \quad \bar{W}_r = W_r, \quad \bar{\psi} = \psi, \quad \bar{p} = p, \quad \bar{\rho} = \rho, \quad \bar{h} = h, \\ \bar{\mu} = \mu \dots \dots \dots (19)$$

这里横向速度 v 按下列变换关系变换:

$$\bar{v} = \frac{v}{r_0(x)} + \frac{dr_0(x)}{r_0^2(x) dx} \cdot x \cdot v \\ \frac{\partial}{\partial x} = r_0^2(x) \frac{\partial}{\partial x} + r_0'(x) \cdot y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = r_0 \frac{\partial}{\partial y} \dots \dots \dots (20)$$

旋成体表面的局部摩擦应力 τ_w 可以用平面上局部表面摩擦应力来表示:

$$\tau_w = r_0(x) \cdot \tau_w \dots \dots \dots (21)$$

同理

$$\delta = \frac{\bar{\delta}}{r_0(x)}, \quad \theta = \frac{\bar{\theta}}{r_0(x)}, \quad H_{12} = \bar{H}_{12} \dots \dots \dots (22)$$

通过上述方程可以得到具体的变换关系:

$$\frac{d\bar{\theta}}{dx} = \frac{1}{r_0^2(x)} \cdot \frac{d[r_0(x) \cdot \theta]}{dx} = \frac{1}{r_0(x)} \frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{r_0^2(x)} \frac{d[r_0(x)]}{dx} \cdot \theta$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{r_0^2(x)} \frac{dw_f}{dx} \dots \dots \dots (23)$$

方程 (17) 在应用方程 (23) 后得到轴对称旋成体表面可压缩流动紊流边界层的冲量积分方程:

$$\frac{d\theta}{dx} + \left[(H_{12} + 2 - M^2_r) \cdot \frac{dw_f}{w_f dx} + \frac{1}{r_0(x)} \frac{dr_0(x)}{dx} \right] \cdot \theta$$

$$= \frac{\tau_w}{\rho_f \cdot w_f^2} = \frac{C_f}{2} \dots \dots \dots (24)$$

3. 任意回转面上可压缩流动轴流叶栅紊流边界层的冲量积分方程

假定在任意回转面上叶栅的叶型表面边界层垂直于壁面, 并仍可采用 (x, y) 的直角坐标来表示的二元边界层, 但在连续方程中考虑了流片厚度的变化, 还考虑了离心力的影响。参看图 2 经推导得到下面形式的冲量积分方程:

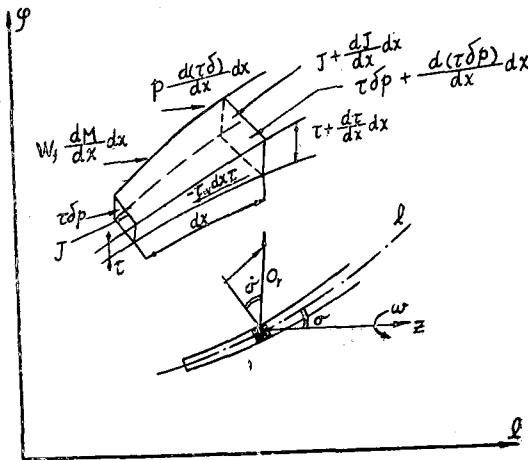


图 2 叶型表面边界层微元示意图

$$\frac{d\theta}{dx} + \left[(H_{12} + 2 - M^2_r) \frac{dw_f}{w_f dx} + \frac{1}{r(x)} \frac{d\tau(x)}{dx} + M^2_s \cdot \frac{du_\omega}{u_\omega dl} \cdot \sin\beta \right. \\ \left. + H_{02} \left(1 - \frac{\rho_m}{\rho_f} \right) \frac{u_\omega^2}{w_f^2} \frac{du_\omega}{u_\omega dl} \cdot \sin\beta \right] \cdot \theta = \frac{\tau_\omega}{\rho_f w_f^2} = \frac{C_f}{2} \dots \dots \dots (25)$$

其中 $u_\omega = \omega \cdot r$; $M_s = \frac{u_\omega}{a}$; $H_{02} = \frac{\delta}{\theta}$

方程 (25) 中, 对于非转动的导流叶栅和可以忽略 $\frac{du_{\omega}}{u_{\omega} dl} \approx 0$ 项的轴流式转动叶

栅, 则方程 (25) 左边最后两项消失, 就变成下面的形式:

$$\frac{d\theta}{dx} + \left[(H_{12} + 2 - M^2) \cdot \frac{dw_r}{w_r dx} + \frac{1}{\tau(x)} \frac{d\tau(x)}{dx} \right] \cdot \theta = \frac{C_f}{2} \dots \dots \dots (26)$$

现在我们来分析方程 (24) 和 (26), 这是描写两类完全不同边界层的冲量积分方程, 但它们有完全相似的形式, 并且是逐项对应, 所不同的是相对应项

$$\frac{d\tau(x)}{\tau(x) dx} \text{ 和 } \frac{dr_0(x)}{r_0(x) dx} = \frac{d[\Delta\varphi \cdot r_0(x)]}{[\Delta\varphi r_0(x)] dx} \text{ 项。}$$

但它们有完全相同的物理意义, 它们都是表示流片厚度在 x 方向的变化率, 并且都是垂直于流动方向, 再加这两个方程中的 H_{12} 和 C_f 都有相同的定义和表示形式。这样我们就可以和水、电、电、传热、水、气之间比拟那样, 通过上述两数边界层之间的比拟, 就可以把轴对称旋成体表面可压缩流动紊流边界层特征参数的解中包含的 $r_0(x)$ 项, 改变成 $\tau(x)$ 项, 就可以得到任意回转面上叶栅表面边界层特征参数的解了。

通过上述分析, 我们就可以把平面不可压或平面可压缩流动边界层的解分别用 mager's 和 mangler's 联合变换 [6] 和 mangler's 变换关系转换到轴对称旋成体表面上去, 然后再通过轴对称旋成体表面边界层和任意回转面上轴流式叶栅表面边界层特征参数解之间的变换关系转换到任意回转面上去。这就可以避免直接在任意回转面上解边界层所遇到的困难。

四、平面可压缩流动紊流边界层特征参数的计算方法

本文采用 Head's [7] 紊流边界层特征参数计算的物理模型, 并且采用 Green's [8] 在 Head's 的平面不可压缩流动半经验计算方法基础上发展出来的平面可压缩流动紊流边界层特征参数完全解析的计算方法。

1. 基本关系式:

按照 Head's 的物理模型, 在可压缩流动紊流边界层内流线方向流量增长的速率可以写成下面的形式:

$$\frac{d}{dx} (\rho_t w_t \cdot \Delta) = \rho_t w_t \cdot F \dots \dots \dots (27)$$

其中下的定义是无因次流线方向“掺入”速率。

$$F = \frac{1}{\rho_t \cdot w_t} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_{(x)}} \rho \cdot w \cdot dy \dots \dots \dots (28)$$

对于可压缩流动运载厚度 Δ 的定义如下:

$$\Delta = \int_0^{\delta_{r,1}} \left(\frac{\rho_w}{\rho_f \cdot w_f} \right) dy = \delta_{r,1} - \delta^* \dots \dots \dots (29)$$

其中 $\delta_{r,1}$ 定义在 $\delta_{r,1} = y$, 在 $w/w_f = 0.995$ 处。

将方程(27), 展开得

$$\frac{d\Delta}{dx} = F - \Delta \cdot \left(\frac{1}{\rho_f} \frac{d\rho_f}{dx} + \frac{1}{w_f} \frac{dw_f}{dx} \right)$$

在用 $-\frac{H_f}{w_f} \frac{dw_f}{dx}$ 替代 $\frac{1}{\rho_f} \frac{d\rho_f}{dx}$ 后得

$$\frac{d\Delta}{dx} = F + (M_f - 1) \frac{\Delta}{w_f} \frac{dw_f}{dx} \dots \dots \dots (30)$$

采用同样的替代可压缩流动平面紊流边界层冲量积分方程可以写成下列形式:

$$\frac{d\theta}{dx} + (H_{12} + 2 - M_f^2) \frac{\theta}{w_f} \frac{dw_f}{dx} = \frac{C_f}{2} \dots \dots \dots (31)$$

方程(31)是冲量积分方程, (30)是辅助方程。因为在紊流边界层中未知数多于方程的个数, 因此要联立求解方程(30)和(31)除给出 M_f , w_f 沿 x 的分布外, 还必须知道局部的 C_f , F , 和 H_{12} 等的值, 所以在求解中还必须建立一系列的辅助关系式。

2. 辅助关系式:

在Green's 1966 [9] 边界层测量的基础上得出了下列的解析关系式:

$$\bar{H} = 1 + [0.9 / (H_1 - 3.3)]^{0.75} \dots \dots \dots (32)$$

$$(H_1)_x = 3.4 + 1.87 / [(H)_x - 0.5]^{3.8} \dots \dots \dots (33)$$

其中 $\bar{H} = \left(\int_0^\infty \frac{\rho}{\rho_f} \left(1 - \frac{w}{w_f} \right) dy / \theta \right)$

$$H_x = \bar{H} \cdot \varphi(M_f, \bar{H}) \dots \dots \dots (34)$$

在方程(34)中的详细关系式的推导见Green's [9] 中的附录A₅, A₆;

对于指数规律的速度剖面有下列表达式:

$$H_x = \bar{H} \cdot \left[1 + \frac{\frac{r \cdot (M_f^2) \cdot (\bar{H} + 1) \cdot (\bar{H} - 1)^2}{5 \bar{H} (3 \bar{H} - 1) (2 \bar{H} - 1)}}{1 + \frac{r \cdot M_f^2}{5} \left\{ 1 - \frac{\bar{H} (\bar{H} + 1)}{(3 \bar{H} - 1) (2 \bar{H} - 1)} \right\}} \right] \dots \dots \dots A_5$$

$$\frac{H_1}{(H_1)_x} = 1 + \left(\frac{H_1 - 1}{H_1 + 1} \right) \frac{r \cdot M_f^2}{\left[\frac{r \cdot M_f^2}{5} + \left(\frac{H_1 + 1}{2} \right) \right]} \dots \dots \dots A_6$$

$$\text{其中 } H_1 = \Delta/\theta = \frac{\delta_{t,1} - \delta^*}{\theta},$$

对于绝热壁面 $r = 1$, 绝热指数 $\gamma = 1.4$,

$(H)_x$ 和 $(H_1)_x$ 是相对应的运动当量值。

Sfanden (1964 [10]) 拟合了 Head's 的经验曲线成下列解析式:

$$F = 0.0306[(H_1)_x - 3.0]^{-0.653} \dots \dots \dots (35)$$

在冲量方程中剩下的未知参数 $H_{1,2}$ 和 G_r 可以用下面的法求得:

Spence (1961 [11]) 假定通过边界层的温度分布用下式给出:

$$T = T_w + (T_r - T_w) \frac{w}{w_f} + (T_f - T_r) \left(\frac{w}{w_f}\right)^2 \dots \dots \dots (36)$$

注脚 w 和 r 分别表示壁面温度和恢复温度。

上式如果对于在流线方向壁面温度有显著的变化, 有热传导和压力降, 而两者同时有可观的变化时是不符合的。对于这样的温度分布得下式:

$$H_{1,2} = \frac{T_w \bar{H}}{T_f} + \frac{T_r}{T_f} - 1 \dots \dots \dots (37)$$

其中 \bar{H} 由方程 (32) 给出; T_r 中用的温度恢复系数 ($\xi_r = 0.89$)。

确定 C_r 由 Spence [11] 把不可压表面摩擦系数规律转换成 (用 Echert's [12] 的中间温度关系所给出的参数状态) 可压缩的

$$C_r = \frac{T_f}{T_m} \bar{C}_r \dots \dots \dots (38)$$

其中 T_m 是中间温度; \bar{C}_r 是不可压的。

$$T_m = 0.5(T_w + T_f) + 0.22(T_r - T_f) \dots \dots \dots (39)$$

\bar{C}_r 是用不可压规律得出的表面摩擦系数, 在雷诺数 $R\theta = \frac{\mu_r}{\mu_m} R\theta \dots \dots \dots (40)$

$$\text{其中 } \frac{\mu_r}{\mu_m} = \left(\frac{T_f}{T_m}\right)^{3/2} \frac{T_m t A}{T_f t A}; A = 110.4^\circ K \quad R\theta = \frac{w_f \theta}{y} \dots \dots \dots (41)$$

粘性系数规律可以采用 Stutherland's 粘性系数规律, 近似的不可压流动表面摩擦系数规律用 Ludwig-tillman [13], 并把它转换的形参数 \bar{H} 看作和通常的不可压流动形参数相当的形式, 这样得到:

$$\bar{C}_r = 0.46 \exp(-1.561 \bar{H}) R\theta^{-0.268} \dots \dots \dots (42)$$

3. 具体的计算步骤:

对于边界层特征参数的计算, 在给出 M_r , W_r , T_w 的分布后联立求解方程 (30) 和 (31)。

从已知 θ 和 Δ 的初始值开始, 并且每一步计算结束所得的 θ 和 Δ 值 作为下一步计算站的初值, 那末, 计算的具体步骤如下:

① $H_1 = \Delta/\theta$;

- ② \bar{H} 从方程 (32) 中算得;
- ③ $(H_1)_s$ 从方程 (A₅) 中算得;
- ④ $(H_1)_s$ 从方程 (33) 中算得;
- ⑤ F 从方程 (35) 中算得;
- ⑥ 在得到 \bar{H} 后 H_{12} 可以从方程 (37) 中算得;
- ⑦ T_m 从 (39) 中算得;
- ⑧ 在选用适当的 μ_t/μ_m 关系后, \bar{R}_0 从 (40) 中算得;
- ⑨ \bar{C}_t 从 (42) 中算得;
- ⑩ 在已知上述参数以后就可以解方程 (30) 和 (31) 了。这样一步步地求解下去, 直到叶栅出气边为止。
- 最后可以得到出气边上的冲量厚度 θ , 形参数 H_{12} 和位移厚度 δ^* 。

五、结 束 语

本文提供的损失计算方法, 仅作了理论上的阐述, 还没有经过具体的例子计算和实验验证。本方法的精度如何? 又如何作进一步的修正还必须通过今后的实践工作来验证, 如有不当之处, 还需不断的修正。

参 考 文 献

- [1] S.Liebein, Theoretical Loss relation for lowspeed two-Dimensional Cascade flow, NACA TN 3622 (1959) .
- [2] W.L.Stewart, Analysis of two-Dimensional Compressible flow Loss characteristics Dawn Stream of turbomachine bladerows in terms of Basic boundary-Loyer characteristics, NACA TN 3515 (1955) .
- [3] H.Schlichting, Boundary Loyer thory (1960) .
- [4] K.Stewation, Correlated incompressible and Compressible boundary Loyers, 1949 proc.Roy-soc A200 84.
- [5] Mager, Transformation of the Compressible turbulent Boundary Loyer, J. of the Aeronautical science vol. 25 Mag (1958) .
- [6] J.S.Shang, Compressible turbulent Boundary Loyer with pressure Gradient, AIAA Journal Vol 6 №9 Sept. (1968) .
- [7] M.R.Head, Entrainment in the turbulent boundary Layex, ARCTR R M №3152 (1958) .
- [8] J.E.Green, The prediction of turbulent boundary Layer development in Compressible flow, J. Fluid mech 1968 Vol. 31 part 4 (1968) .
- [9] J.E.Green, 1966ph. D. thesis Combridge university.
- [10] N. M. Standen, AIAA paper № 64-584 (1964) .
- [11] D. A. Spence, The growth of Compressible turbulent boundary Layer on isothermal and adiabatic walls, ARC RM № 3191.
- [12] E. R. G. Eckert, J. Aero. sic 22,585 (1955) .
- [13] H. Ludwig-tillman, Investigation of the wall shiring stresses in turbulent boundary Layer NACA TN 1285 (1950) .
- [14] H. Fernholz, A new empirical relationship between the form-parameters $H_{3,2}$ and $H_{1,2}$ in boundary Layer thory, J. Roy. Aeronaut. soc. 1962. 66. № 621 p. 588-589.

附录一

型面质量平均动能损失系数的推导。按文中所述的定义，它的数学表达式（7）如下：

$$\bar{\xi}_{\text{型}} = \frac{\bar{E}_{1f} - \bar{E}_1}{E_{2t}} \dots \dots \dots (7)$$

在这里 \bar{E}_{1f} 表示在站一上自由流体质量平均后单位重量流体的动能， \bar{E}_1 表示在站 1 上粘性流体经质量平均后单位重量流体之动能。

我们将（7）式用质量平均式展开

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{\text{型}} &= \frac{\int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} \left(\frac{E_{1f} - E_1}{E_{2t}} \right) (\rho_1 W_1) \cos \beta_1 d\bar{\eta}}{\int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} (\rho_1 W_1) \cos \beta_1 d\bar{\eta}} \\ &= \frac{\int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} \left(\frac{E_{1f}}{E_{2t}} \right) \left(\frac{\rho_1 W_1}{\rho_{2t} W_{2t}} \right) d\bar{\eta} - \int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} \left(\frac{E_1}{E_{2t}} \right) \left(\frac{\rho_1 W_1}{\rho_{2t} W_{2t}} \right) d\bar{\eta}}{\int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} \left(\frac{\rho_1 W_1}{\rho_{2t} W_{2t}} \right) d\bar{\eta}} \\ &= \frac{\int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} \left(\frac{W_{1f}}{W_{2t}} \right)^2 \left(\frac{\rho_1 W_1}{\rho_{2t} W_{2t}} \right) d\bar{\eta} - \int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} \left(\frac{W_1}{W_{2t}} \right)^2 \left(\frac{\rho_1 W_1}{\rho_{2t} W_{2t}} \right) d\bar{\eta}}{\int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} \left(\frac{\rho_1 W_1}{\rho_{2t} W_{2t}} \right) d\bar{\eta}} \\ &= \frac{\int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} \left(\frac{\rho_{1f}}{\rho_{2t}} \right) \left(\frac{W_{1f}}{W_{2t}} \right)^3 \left(\frac{\rho_1 W_1}{\rho_{1f} W_{1f}} \right) d\bar{\eta} - \int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} \left(\frac{\rho_{1f}}{\rho_{2t}} \right) \left(\frac{W_{1f}}{W_{2t}} \right)^3 \left(\frac{\rho_1}{\rho_{1f}} \right) \left(\frac{W_1}{W_{1f}} \right)^3 d\bar{\eta}}{\int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} \left(\frac{\rho_1 W_1}{\rho_{1f} W_{1f}} \right) \left(\frac{\rho_{1f}}{\rho_{2t}} \right) \left(\frac{W_{1f}}{W_{2t}} \right) d\bar{\eta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} \left(\frac{W_{1f}}{W_{2f}}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{W_1}{W_{1f}}\right)^2\right] \left(\frac{\rho_1 W_1}{\rho_{1f} W_{1f}}\right) d\bar{\eta} \\
 &= \frac{\int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} \left(\frac{\rho_1 W_1}{\rho_{1f} W_{1f}}\right) d\bar{\eta}}{\int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} \left(\frac{\rho_1 W_1}{\rho_{1f} W_{1f}}\right) d\bar{\eta}} \\
 &= \left(\frac{\widetilde{W}_{1f}}{W_{2f}}\right)^2 \frac{\int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} \left[1 - \left(\frac{W_1}{W_{1f}}\right)^2\right] \left(\frac{\rho_1 W_1}{\rho_{1f} W_{1f}}\right) d\bar{\eta}}{\int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} \left(\frac{\rho_1 W_1}{\rho_{1f} W_{1f}}\right) d\bar{\eta}} \dots\dots\dots (A_1)
 \end{aligned}$$

在我们应用边界层特征参数定义和无因次化关系后得到

$$\bar{\xi}_{\text{型}} = \left(\frac{\widetilde{\lambda}_{1f}}{\lambda_{2f}}\right)^2 \frac{\bar{e}_1}{1 - (\delta_1^* + \delta_{1f}^*)} \dots\dots\dots (A_2)$$

在应用公式 (6) 后得到

$$\bar{\xi}_{\text{型}} = \left(\frac{\widetilde{\lambda}_{1f}}{\lambda_{2f}}\right)^2 \frac{\bar{e}_{1, \text{tot}}}{r_1 \Delta \varphi \cdot \cos \beta_1 - (\delta_{1, \text{tot}}^* + t_a)} \dots\dots\dots (A_3)$$

附录二

总的质量平均动能损失系数的推导, 由文中定义得数学表达式:

$$\bar{\xi}_{\text{总}} = \frac{E_{2f} - \widetilde{E}_2}{E_{2f}} = 1 - \frac{\widetilde{E}_2}{E_{2f}} = 1 - \left(\frac{W_2}{W_{2f}}\right)^2 \dots\dots\dots (B_1)$$

a, 写出站 1 和站 2 上的连续方程 见图 (一)

$$\bar{\tau}_1 \cos \beta_1 \int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} (\rho_1 W_1) d\bar{\eta} = \bar{\tau}_2 \bar{S}_2 (\rho_2 W_2) \cos \beta_2 \dots\dots\dots (B_2)$$

b, 写出站 1 和站 2 上的切向动量守恒方程:

$$\sin \beta_1 \cdot \bar{\tau}_1 \cdot \cos \beta_1 \int_{-\frac{1}{2}\bar{S}_1}^{\frac{1}{2}\bar{S}_1} (\rho_1 W_1^2) d\bar{\eta} = \bar{\tau}_2 \bar{S}_2 (\rho_2 W_2^2) \cos \beta_2 \sin \beta_2 \dots\dots\dots (B_3)$$

$\tilde{\beta}_1$ 表示沿栅距的质量平均值;

由 (B₂) 得

$$\bar{\tau}_1 \bar{S}_1 \cos \tilde{\beta}_1 [1 - (\bar{\delta}^*_{1.} + \delta^*_{1.})] \cdot \tilde{\rho}_{1f} \tilde{W}_{1f} = \bar{\tau}_2 \bar{S}_2 (\rho_2 W_2) \cos \beta_2 \dots \dots \dots (B_2)$$

$$\therefore \left(\frac{\rho_2}{\tilde{\rho}_{1f}} \right)^2 \left(\frac{W_2}{\tilde{W}_{1f}} \right)^2 = \left(\frac{\bar{S}_1 \bar{\tau}_1 \cos \tilde{\beta}_1}{\bar{\tau}_2 \bar{S}_2 \cos \beta_2} \right)^2 \cdot [1 - (\bar{\delta}^*_{1.} + \delta^*_{1.})]^2 \dots \dots \dots (B_4)$$

由 (B₃) 得:

$$\left(\frac{\rho_2}{\tilde{\rho}_{1f}} \right)^2 \left(\frac{W_2}{\tilde{W}_{1f}} \right)^2 = \frac{\bar{\tau}_1 \bar{S}_1 \cdot \sin \tilde{\beta}_1 \cos \tilde{\beta}_1}{\bar{\tau}_2 \bar{S}_2 \cdot \sin \beta_2 \cos \beta_2} [1 - (\bar{\delta}^*_{1.} + \delta^*_{1.} + \bar{\theta}^*)] \dots \dots \dots (B_2)$$

由方程 (4) (5) 得出:

$$\left(\frac{\rho_2}{\tilde{\rho}_{1f}} \right)^2 = \frac{\bar{S}_2 \bar{\tau}_1 \cos^2 \tilde{\beta}_1 \sin \tilde{\beta}_2 \cos \tilde{\beta}_2 [1 - (\bar{\delta}^*_{1.} + \delta^*_{1.})]^2}{\bar{C}_2 \bar{S}_2 \cos^2 \beta_2 \sin \tilde{\beta}_1 \cos \tilde{\beta}_1 [1 - (\bar{\delta}^*_{1.} + \delta^*_{1.} + \bar{\theta}^*)]^2}$$

$$\left(\frac{\rho_2}{\tilde{\rho}_{1f}} \right)^2 \frac{\bar{\tau}_2 \bar{S}_2 \sin \tilde{\beta}_1}{\bar{\tau}_1 \bar{S}_1 \sin \tilde{\beta}_2} [1 - (\bar{\delta}^*_{1.} + \delta^*_{1.} + \bar{\theta}^*)] = \frac{\cos \tilde{\beta}_1}{\cos \beta_2} [1 - (\bar{\delta}^*_{1.} + \delta^*_{1.})]^2 ;$$

$$\frac{\cos^2 \tilde{\beta}_1}{\cos^2 \beta_2} [1 - (\bar{\delta}^*_{1.} + \delta^*_{1.})]^4 = \left(\frac{\rho_2}{\tilde{\rho}_{1f}} \right)^2 \left(\frac{\bar{\tau}_2 \bar{S}_2}{\bar{\tau}_1 \bar{S}_1} \right)^2 \frac{\sin \tilde{\beta}_1}{(1 - \cos^2 \beta_2)}$$

$$\cdot [1 - (\bar{\delta}^*_{1.} + \delta^*_{1.} + \bar{\theta}^*)]^2 ;$$

$$\frac{\cos^2 \tilde{\beta}_1}{\cos^2 \beta_2} [1 - (\bar{\delta}^*_{1.} + \delta^*_{1.})]^4 - \cos \tilde{\beta}_1 [1 - (\bar{\delta}^*_{1.} + \delta^*_{1.})]^4 = \left(\frac{\rho_2}{\tilde{\rho}_{1f}} \right)^2 \left(\frac{\bar{\tau}_2 \bar{S}_2}{\bar{\tau}_1 \bar{S}_1} \right)^2 \cdot$$

$$\cdot \sin^2 \tilde{\beta}_1 [1 - (\bar{\delta}^*_{1.} + \delta^*_{1.} + \bar{\theta}^*)]^2 ;$$

$$\therefore \frac{\cos^2 \tilde{\beta}_1}{\cos^2 \beta_2} = \frac{\left(\frac{\rho_2}{\tilde{\rho}_{1f}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\bar{\tau}_2 \bar{S}_2}{\bar{\tau}_1 \bar{S}_1} \right)^2 \cdot \sin^2 \tilde{\beta}_1 [1 - (\bar{\delta}^*_{1.} + \delta^*_{1.} + \bar{\theta}^*)]^2}{[1 - (\bar{\delta}^*_{1.} + \delta^*_{1.})]^4} + \cos^2 \tilde{\beta}_1$$

.....(B₆)

由 (B₂)' 得:

$$\left(\frac{\cos^2 \tilde{\beta}_1}{\cos^2 \beta_2}\right) = \left(\frac{\tau_2 \bar{S}_2}{\tau_1 \bar{S}_1}\right)^2 \left(\frac{\rho_2 W_2}{\rho_{1f} \tilde{W}_{1f}}\right)^2 [1 - (\delta^*_{1.} + \delta^*_{1.})]^2 \dots\dots\dots (B_7)$$

由 (B₆) (B₇) 得:

$$\left(\frac{W_2}{\tilde{W}_{1f}}\right)^2 = \frac{\sin^2 \tilde{\beta}_1 [1 - (\delta^*_{1.} + \delta^*_{1.} + \bar{\theta}^*)]^2}{[1 - (\delta^*_{1.} + \delta^*_{1.})]^2} + \frac{\cos^2 \tilde{\beta}_1 [1 - (\delta^*_{1.} + \delta^*_{1.})]^2}{\left(\frac{\tau_2 \bar{S}_2}{\tau_1 \bar{S}_1}\right)^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_{1f}}\right)^2},$$

$$\therefore W_2 = \tilde{W}_{1f} \left\{ \frac{\sin^2 \tilde{\beta}_1 [1 - (\delta^*_{1.} + \delta^*_{1.} + \bar{\theta}^*)]^2}{[1 - (\delta^*_{1.} + \delta^*_{1.})]^2} + \frac{\cos^2 \tilde{\beta}_1 [1 - (\delta^*_{1.} + \delta^*_{1.})]^2}{\left(\frac{\tau_2 \bar{S}_2}{\tau_1 \bar{S}_1}\right)^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_{1f}}\right)^2} \right\} \dots\dots\dots (B_8)$$

将 (B₈) 代入 (B₁) 并采用 W₀' 除速度以后得:

$$\bar{\xi}_{总} = 1 - \left(\frac{\tilde{\lambda}_{1f}}{\lambda_{2f}}\right)^2 \cdot \left\{ \frac{\sin^2 \tilde{\beta}_1 [1 - (\bar{H}^*_{12} \cdot \bar{\theta}^*_{1.} + \bar{\theta}^*_{1.} + \delta^*_{1.})]^2}{[1 - (\bar{H}^*_{12} \cdot \bar{\theta}^*_{1.} + \delta^*_{1.})]^2} + \frac{\cos^2 \tilde{\beta}_1 [1 - (\bar{H}^*_{12} \cdot \bar{\theta}^*_{1.} + \delta^*_{1.})]^2}{\left(\frac{\tau_2 \bar{S}_2}{\tau_1 \bar{S}_1}\right)^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_{1f}}\right)^2} \right\} \dots\dots\dots (B_9)$$

附录三

λ_{2f} 的求解:

叶栅求解区域可以用下图来表示:

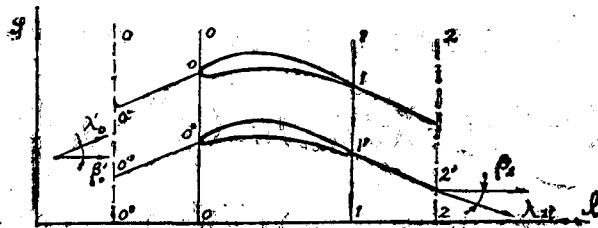


图 8 叶栅求解区示意图

假定O'—O'和2—2站上的气流参数是均匀的, 而 λ_o' 和 β_o' (即 $\lambda_o'_{\varphi}$, $\lambda_o'_1$, β_o')是给定的,

a, 对于不可压流动:

写出O'—O'和2—2站上的连续方程:

$$\lambda_{2t1} = \lambda_{2t} \cdot \cos \beta_2 = \frac{\bar{\tau}_o' \bar{r}_o'}{\tau_2 r_2} (\lambda_o' \cos \beta_o') \dots\dots\dots (C_1)$$

写出1—1和2—2站上的动量矩守恒条件:

$$\lambda_{2t\varphi} = \lambda_{2t} \cdot \sin \beta_2 = (\tilde{\lambda}_{1r} \sin \tilde{\beta}_1 + \lambda_{u1}) \frac{\bar{r}_1}{r_2} - \lambda_{2u}$$

$$\therefore \lambda_{2t}^2 = \lambda_{2t0}^2 + \lambda_{2t\varphi}^2$$

$$\therefore \lambda_{2t}^2 = \left[\frac{\bar{\tau}_o' \bar{r}_o'}{\tau_2 r_2} (\lambda_o' \cos \beta_o') \right]^2 \left[(\tilde{\lambda}_{1r} \sin \tilde{\beta}_1 + \lambda_{u1}) \frac{\bar{r}_1}{r_2} - \lambda_{2u} \right]^2 \dots\dots\dots (C_2)$$

其中 $\tilde{\lambda}_{1r}$, $\tilde{\beta}_1$ 是在站1上自由流体在一个栅距内的质量平均值。

b, 对于可压缩流动:

对于可压缩流动就没有象不可压流动那样有显式来表示, 因此最好和叶栅的位流求解结合起来。

附 录

在可压缩流动下, 总的动能损失系数的计算:

$$\xi_{\text{总}} = \frac{E_{2t} - E_2}{E_{2t}} = 1 - \frac{W_{2t}^2}{W_{2t}^2} = \frac{\left(\frac{P_0^*}{P_2^*} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\left(\frac{P_0^*}{P_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1}, \dots\dots\dots (E_1)$$

求解 P_0^*/P_2^* ; P_0^*/P_2 ;

写出站1和站2上的连续方程和切向动量守恒方程。并用临界速度来无因次化得:

$$\bar{\tau}_1 \bar{S}_1 \cos \tilde{\beta}_1 (1 - \bar{\delta}^* - \delta^*_{\dots}) \left(\frac{\rho \tilde{W}^2}{\rho^* W_{cp}^2} \right)_{1f} = \left(\frac{\rho W_x}{\rho^* W_{cp}} \right)_2 \frac{P_2^* \bar{\tau}_2 \bar{S}_2}{P_0^*}, \dots\dots (E_2)$$

$$\bar{\tau}_1 \bar{S}_1 \sin \alpha_1 \cos \tilde{\beta}_2 (1 - \bar{\delta}^* - \delta^*_{\dots} - \theta^*) \left(\frac{\rho \tilde{W}^2}{\rho^* W_{cp}^2} \right)_{1f} = \left(\frac{\rho W_x W_s}{\rho^* W_{cp}^2} \right)_2 \frac{P_2^* \bar{\tau}_2 \bar{S}_2}{P_0^*}, \dots\dots\dots (E_3)$$

轴向动量守恒方程必须考虑静压力的作用:

$$\overline{\tau_1 S_1} (gP_1 + CDS^2 \tilde{\beta}_1 (1 - \bar{\delta}^* - \delta_{1..}^* - \bar{\theta}^*) (\rho W^2)_{1f}) = \overline{\tau_2 S_2} (gP_2 + CDS^2 \tilde{\beta}_2 (\rho W^2)_2); \dots\dots\dots (E_4)$$

其中 $W_{cp} = \sqrt{\frac{2K}{K+1} RgT_D^*}$; $\rho^* = \frac{P_0^*}{RT_0^*}$;

由 (E₄) 得:

$$\overline{\tau_1 S_1} \left[\left(\frac{P_1}{P_0^*} \right) \left(\frac{K+1}{2K} \right) + \text{COS}^2 \tilde{\beta}_1 (1 - \bar{\delta}^* - \delta_{1..}^* - \bar{\theta}^*) \left(\frac{\tilde{\rho} \tilde{W}^2}{\rho^* W_{cp}^2} \right)_{1f} \right] = \left[\frac{P_2}{P_2^*} - \frac{P_2^*}{P_0^*} \left(\frac{K+1}{2K} \right) + \left(\frac{\rho W_x^2}{\rho^* W_{cp}^2} \right)_2 \frac{P_2^*}{P_0^*} \right] \overline{\tau_2 S_2}; \dots\dots\dots (E_5)$$

在 (E₅) 中解出 P_2^*/P_0^* , 并且由 $P_1/P_0^* = (\tilde{\rho}/\rho^*)_{1f} (1 - A_{1f})$

其中 $A_{1f} = \frac{K-1}{K+1} \left(\frac{W}{W_{cp}} \right)_{1f}^2$; 代入 (E₅)

得:

$$(1 - A_{1f}) \left(\frac{K+1}{2K} \right) \text{COS}^2 \tilde{\beta}_1 (1 - \bar{\delta}^* - \delta_{1..}^* - \bar{\theta}^*) \left(\frac{\tilde{W}}{W_{cp}} \right)_{1f} = \left[\frac{P_2}{P_2^*} \left(\frac{K+1}{2K} \right) \left(\frac{\rho W_x^2}{\rho^* W_{cp}^2} \right)_2 \right] \cdot \left[\frac{\text{COS} \tilde{\alpha}_1 (1 - \bar{\delta}^* - \delta_{1..}^*) \left(\frac{\tilde{W}}{W_{cp}} \right)_{1f}}{\left(\frac{\rho W_x}{\rho^* W_{cp}} \right)_2} \right]; \dots\dots\dots (E_6)$$

$$C = \frac{(1 - A_{1f}) \left(\frac{K+1}{2K} \right) + \text{COS}^2 \tilde{\beta}_1 (1 - \bar{\delta}^* - \delta_{1..}^* - \bar{\theta}^*) \left(\frac{\tilde{W}^2}{W_{cp}^2} \right)_{1f}}{\text{COS} \tilde{\alpha}_1 (1 - \bar{\delta}^* - \delta_{1..}^*) \left(\frac{W}{W_{cp}} \right)_{1f}}$$

(E₆) 变成下式:

$$\left(\frac{\rho W_x^2}{\rho^* W_{cp}^2} \right)_2 - C \left(\frac{\rho W_x}{\rho^* W_{cp}} \right)_2 + \frac{K+1}{2K} \frac{P_2}{P_2^*} = 0,$$

在应用状态方程和能量方程后得:

$$\left(\frac{W_x}{W_{cp}}\right)_2^2 - C \left(\frac{W_x}{W_{cp}}\right)_2 + \frac{K+1}{2K} \left\{ 1 - \frac{K-1}{K+1} \left[\left(\frac{W_x}{W_{cp}}\right)_2^2 + \left(\frac{W_a}{W_{cp}}\right)_2^2 \right] \right\} = 0, \dots\dots\dots(E_7)$$

从(E₂) (E₃)中解出

$$\left(\frac{W_a}{W_{cp}}\right)_2 = D = \left(\frac{\tilde{W}}{W_{cp}}\right)_{1f} \sin \tilde{\beta}_1 \left(\frac{1 - \bar{\delta}^* - \delta_{t,*} - \bar{\theta}^*}{1 - \bar{\delta}^* - \delta_{t,*}}\right) \dots\dots\dots(E_8)$$

在应用(E₈)后(E₇)得:

$$\left(\frac{W_x}{W_{cp}}\right)_2^2 - \frac{2K}{K+1} C \left(\frac{W_x}{W_{cp}}\right)_2 + \left(1 - \frac{K-1}{K+1} D^2\right) = 0, \dots\dots\dots(E_9)$$

其中C和D是站一上的巴知函数(E₈)是 $\left(\frac{W_x}{W_{cp}}\right)_2$ 的二次方程, 它的解是:

$$\left(\frac{W_x}{W_{cp}}\right)_2 = \frac{KC}{K+1} - \sqrt{\left(\frac{KC}{K+1}\right)^2 - 1 + \frac{K-1}{K+1} D^2}, \dots\dots\dots(E_{10})$$

一旦得到 $\left(\frac{W_x}{W_{cp}}\right)_2$ 后, 从下式可以得到密度比:

$$\left(\frac{\rho}{\rho^*}\right)_2 = \left\{ 1 - \frac{K-1}{K+1} \left[D^2 + \left(\frac{W_x}{W_{cp}}\right)_2^2 \right] \right\}^{\frac{1}{K-1}}, \dots\dots\dots(E_{11})$$

从方程(E₂)中解出

$$\left(\frac{P_2^*}{P_0^*}\right) = \frac{\left(\frac{\tilde{\rho}\tilde{W}}{\rho^*W_{cp}}\right)_{1f} \cos \tilde{\beta}_1 (1 - \bar{\delta}^* - \delta_{t,*})}{\left(\frac{\rho W_x}{\rho^*W_{cp}}\right)_2} \cdot \frac{\bar{S}_1 \tau_1}{S_2 \tau_2}, \dots\dots\dots(E_{12})$$

由(E₁₁)得到压力比:

$$\left(\frac{P}{P^*}\right)_2 = \left(\frac{\rho}{\rho^*}\right)_2^K, \dots\dots\dots(E_{13})$$

由方程(E₁₂) (E₁₃)得到:

$$\left(\frac{P_0^*}{P_2^*}\right) \text{ 的解:}$$

计算出 $\left(\frac{P_2^*}{P_0^*}\right)$ 和 $\left(\frac{P_0^*}{P_2^*}\right)$ 后代入(E₁)中就可以求得总的损失系数 $\bar{\xi}$ 了。