

轴对称弹性体的有限元法 (网格结点自动形成)

力学所十二室板壳组

一、前言

在生产实际中,经常会提出一些在轴对称载荷作用下轴对称结构的应力分析问题。往往由于结构的几何形状复杂,材料非均质,采用解析法求解是困难的,必须借助于近似的数值解法,有限元法对解决弹性力学问题就是一种强有力的计算工具。

对于结构的几何形状、约束情况、外载荷条件等均对称于某一轴时,其应力、应变、位移分布也必然对称于该轴,它们在圆柱坐标系中,只是 r 、 z 的函数,与 θ 无关,可看作二维问题的特殊情形,被划分的单元体是一些圆环体,结点是圆环线,基本未知量是结点圆环线在径向和轴向的位移。

本报告用轴对称问题的有限元法,采用在 rz 面上形成三角形网格的圆环体单元,由计算机自动形成这些单元和结点的 r 、 z 坐标,计算了旋转盘的应力分布,并以均匀内压作用下无限长厚壁圆筒的计算结果与其精确解作校核符合得很好。

二、单元位移模式, 结点载荷, 应力矩阵和刚度矩阵

1. 每一个三角形环形单元均被当作是一个连续的、均匀的、各向同性弹性体,其结点用逆时针编号为 i 、 j 、 m ,如图一所示。

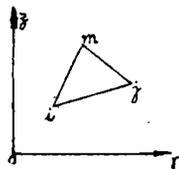


图 1

$$\text{单元结点位移 } \{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

$$\text{其中 } \{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix}, \quad (i, j, m) \quad (2)$$

u_i 、 w_i 是结点 i 径向与轴向的位移。

选取单元的线性位移模式为

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z \\ w = \alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 z \end{cases} \quad (3)$$

由三个结点的位移、坐标解出系数 α_i ,代回式(3),得到

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} [N] \{\delta\}^e = [N_i, N_j, N_m] \{\delta\}^e, \quad (4)$$

其中 $N_i = (a_i + b_i r + c_i z) / 2\Delta$, (i, j, m)

$$(5)$$

I 是二阶单位矩阵

$$\begin{cases} a_i = r_j z_m - r_m z_j \\ b_i = z_j - z_m \\ c_i = r_m - r_j \end{cases} \quad (6)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_m & z_m \end{vmatrix} \quad (7)$$

2. 任一单元所受外载荷,按静力等效原则移置成结点载荷,以 $\{F\}^e$ 表示。

$$\{F\}^e = [R_i Z_i R_j Z_j R_m Z_m]^T$$

R_i 、 Z_i 是结点 i 的径向和轴向外载荷分量。

单元的分布体载荷 $\begin{Bmatrix} R_v \\ Z_v \end{Bmatrix}$ 的等效结点载荷为

$$\{F_v\}^e = 2\pi \iint [N]^T \begin{Bmatrix} R_v \\ Z_v \end{Bmatrix} r \, dr \, dz \quad (9)$$

单元的分布面荷载 $\begin{Bmatrix} P_s \\ Z_s \end{Bmatrix}$ 的等效结点荷载

$$\{F_s\}^e = 2\pi \int [N]^T \begin{Bmatrix} R_s \\ Z_s \end{Bmatrix} r ds \quad (10)$$

这里, s 为荷载作用表面与任何 θ 角的 rz 面相交曲线。

单元内任意一点 P 所受的集中荷载 $\begin{Bmatrix} R_P \\ Z_P \end{Bmatrix}$ 的等

效结点荷载为

$$\{F_P\}^e = [N]^T \begin{Bmatrix} R_P \\ Z_P \end{Bmatrix} \quad (11)$$

一般将受集中荷载作用的点取作结点, 集中荷载即该结点的一个结点荷载。

$$\text{结点荷载 } \{F\}^e = \{F_V\}^e + \{F_s\}^e + \{F_P\}^e, \quad (12)$$

3. 应力矩阵 $[S]$

轴对称问题的应变位移关系为

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

$$\text{式 (4) 代入得 } \{\varepsilon\} = [B] \{\delta\}^e = [B_i, B_j, B_m] \{\delta\}^e \quad (14)$$

其中

$$[B_i] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ f_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m) \quad (15)$$

$$f_i = \frac{a_i}{r} + b_i + c_i \frac{z}{r} \quad (16)$$

注意, 在对称轴上 ($r=0$), $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta$, 即 $f_i = b_i$, (i, j, m)。

$$\text{应力应变关系 } \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = [D] \{\varepsilon\} \quad (17)$$

其中

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

将式 (14) 代入 (17) 得

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{\delta\}^e \quad (19)$$

$$\text{应力矩阵 } [S] = [D] [B] = [S_i, S_j, S_m] \quad (20)$$

其中

$$[S_i] = \frac{E(1-\mu)}{2(1+\mu)(1-2\mu)\Delta} \begin{bmatrix} b_i + A_1 f_i & A_1 c_i \\ A_1 b_i + f_i & A_1 c_i \\ A_1 (b_i + f_i) & c_i \\ A_2 c_i & A_2 b_i \end{bmatrix}, \quad (i, j, m) \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\mu}{1-\mu} \\ A_2 &= \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

4. 单元刚度矩阵

由虚功原理可以得到单元的结点载荷与结点位移的以下关系

$$\{F\}^e = [K]^e \{\delta\}^e \quad (23)$$

$$\text{其中 } [K]^e = 2\pi \iint [B]^T [D] [B] r dr dz = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{1j} & k_{1m} \\ k_{j1} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{m1} & k_{mj} & k_{mm} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\text{子矩阵 } [k_{rs}] = 2\pi \iint [B_r]^T [D] [B_s] r dr dz, \quad (r, s = i, j, m) \quad (25)$$

$$\text{将 } [B_r] \text{ 分成两部分: } [B_r] = [\bar{B}_r] + [B_r'] \quad (26)$$

$[\bar{B}_r]$ 是相应于单元形心 (\bar{r}, \bar{z}) 处在 $[B_r]$ 值

$$[B_r'] = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} \frac{a_r + c_r z}{r} - \frac{a_r + c_r \bar{z}}{\bar{r}} \\ \frac{a_r + c_r z}{r} \\ \frac{a_r + c_r z}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$\text{由此可推得 } [k_{rs}] = [\bar{k}_{rs}] + [k'_{rs}] \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} [\bar{k}_{rs}] &= 2\pi \bar{r} \Delta [B_r]^T [D] [B_s] \\ &= \frac{\pi E \bar{r} (1-\mu)}{2(1+\mu)(1-2\mu)\Delta} \begin{pmatrix} b_r b_s + \bar{f}_r \bar{f}_s + A_1 (b_r \bar{f}_s + b_s \bar{f}_r) + A_2 c_r c_s, & A_1 (b_r + \bar{f}_r) c_s + A_2 c_r b_s \\ A_1 c_r (b_s + \bar{f}_s) + A_2 b_r c_s, & c_r c_s + A_2 b_r b_s \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

\bar{f}_r 是形心处的 f_r 值。当单元网格足够小时, k_{rs} 可以以 \bar{k}_{rs} 作为近似值。

$$\begin{aligned} [k'_{rs}] &= \frac{2\pi}{4(\Delta)^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [D] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iint \left(\frac{a_r + c_r z}{r} - \frac{a_r + c_r \bar{z}}{\bar{r}} \right) \left(\frac{a_s + c_s z}{r} - \frac{a_s + c_s \bar{z}}{\bar{r}} \right) \\ &\quad - \frac{a_s + c_s \bar{z}}{\bar{r}} \Big) r dr dz = \frac{\pi E (1-\mu)}{2(1+\mu)(1-2\mu)} \left(a_r a_s \left(I_1 - \frac{1}{r} \right) + (a_r c_s + a_s c_r) \left(I_2 - \frac{\bar{z}}{r} \right) \right. \\ &\quad \left. + c_r c_s \left(I_3 - \frac{\bar{z}}{r} \right) \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (30)$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\Delta} \iint \frac{1}{r} dr dz = \frac{1}{\Delta} ((A_{j1} - A_{im}) \log r_i + (A_{m1} - A_{i1}) \log r_j + (A_{im} - A_{m1}) \log r_m + B_{im} \\ &\quad (r_m - r_i) + B_{mj} (r_j - r_m) + B_{ji} (r_i - r_j)) \\ I_2 &= \frac{1}{\Delta} \iint \frac{z}{r} dr dz = \frac{1}{\Delta} (((A_{j1}^2 - A_{im}^2) \log r_i + (A_{m1}^2 - A_{i1}^2) \log r_j + (A_{im}^2 - A_{mj}^2) \\ &\quad \log r_m) / 2 + A_{im} B_{im} (r_m - r_i) + A_{mj} B_{mj} (r_j - r_m) + A_{ji} B_{ji} (r_i - r_j) + (B_{im}^2 \\ &\quad (r_m^2 - r_i^2) + B_{mj}^2 (r_j^2 - r_m^2) + B_{ji}^2 (r_i^2 - r_j^2)) / 4) \end{aligned}$$

$$I_3 = \frac{1}{\Delta} \iint \frac{z^2}{r} dr dz$$

$$= \frac{((A_{j_1}^3 - A_{i_1}^3) \log r_1 + (A_{m_1}^3 - A_{j_1}^3) \log r_j + (A_{i_1}^3 - A_{m_1}^3) \log r_m) / 3 + A_{i_1}^2 B_{i_1} (r_m - r_1) + A_{m_1}^2 B_{m_1} (r_j - r_m) + A_{j_1}^2 B_{j_1} (r_1 - r_j) + (A_{i_1} B_{i_1}^2 (r_m^2 - r_1^2) + A_{m_1} B_{m_1}^2 (r_j^2 - r_m^2) + A_{j_1} B_{j_1}^2 (r_1^2 - r_j^2)) / 2 + (B_{i_1}^3 (r_m^3 - r_1^3) + B_{m_1}^3 (r_j^3 - r_m^3) + B_{j_1}^3 (r_1^3 - r_j^3)) / 9}{\Delta}$$

$$A_{i_1} = \frac{r_m z_1 - r_1 z_m}{r_m - r_1}$$

$$B_{i_1} = \frac{z_m - z_1}{r_m - r_1} \quad (32)$$

$[k_{r_s}']$ 是积分修正项, 它是由于单元内 ϵ_0 并非单元形心处的值而引起, 当单元的任意两个结点在对称轴上时, 例如点 $i, m, r_1 = r_m = 0$, 由于对称轴上径向位移为零, $u_i = u_m = 0$, 于是由式 (9) 解得 $\alpha_i = \alpha_m = 0$, 可推出 $u = \alpha_1 r$, $\epsilon_r = \frac{u}{r} = \alpha_1$ 是常量, 因此不需引进积分修正项 krs' , 即 $krs' = 0$ 。如果只有一个结点在对称轴上, 例如点 $i, r_1 = 0$ 则式 (31) 中 $\log r_1$

是无穷大, 但 $A_{i_1} - A_{i_1}$ 为零 (当 $r_j, r_m \neq 0$), $(A_{j_1} - A_{i_1}) \log r_1$ 极限为零, 因此式 (31) 中可略去半径为零的相应的对数项。当两个结点径向坐标相等时, 例如 $r_m = r_1 \neq 0$, 积分在点 i, m 连线下不存在, 因此可令 $A_{i_1} = B_{i_1} = 0$ 。当 r_1, r_j, r_m 互不相等亦不为零时, 积分 I_1 中非对数项 (后三项) 自然消失。

三、求解结点位移, 计算应力分布

前面已得出了轴对称问题的单元刚度矩阵, 并且外载荷经过静力等效移置成为结点载荷, 于是对每一个结点 i 可以建立用结点位移表示的结点力平衡方程

$$\sum_e \sum_{n=i, j, m} [k_{in}] \{\delta_n\} = \{F_i\} \quad (33)$$

这里 \sum_e 表示对与结点 i 相连接的全部单元求和, 方程右端为结点载荷项, 由式 (9) — (12) 求得, 旋转盘离心力体载荷

$\begin{Bmatrix} R_v \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho \omega^2 r \\ 0 \end{Bmatrix}$, ρ 是材料密度, ω 是角速度, 圆筒受均匀内压面载荷

$$\begin{Bmatrix} R_s \\ Z_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ 0 \end{Bmatrix}$$

。将各结点的平衡方程集合在一起, 便得到 $[K] \{\delta\} = \{F\}$, (34)

其中 $[K]$ 就是结构的整体刚度矩阵, 实际上得到的一组以结点位移为未知数的线性代数方程组, 通过计算机解线性代数方程组来求解结点位移, 然后由式 (19) 计算应力, 结点处的应力可以用该结点周围所有单元在该点的应力值平均求得。

三角形单元及结点坐标由计算机自动形成。在附录中给出网格及结点坐标自动形成的方法。

计算在 TQ-16 机上进行, 并以资料 [2] 中关于 709 机上平面问题的有限单元法 (迭代解) 程序为基础, 亦利用刚度矩阵的对称性, 采用紧凑存储法, 编制了网格自动形成的轴对称弹性体有限单元法程序。计算了参考资料 [1] 中图 9.4 所示旋转盘应力分布, 结果与该文采用等参数单元的结果符合比较好, 并将均匀内压作用下无限长厚壁圆筒的计算结果以其精确解作校核符合得很好。

附录 网格和结点坐标值的自动形成

任何一个平面图形都可以划分为若干个四边形块 (包括曲边四边形), 如图二所示, 现将它分为十二个四边形块。

1. 四边形块内新网格的结点坐标值的产生

对于任意形状的四边形, 利用“等参数”坐标变换来定出新结点坐标。如图二中第三块, 将其四个角

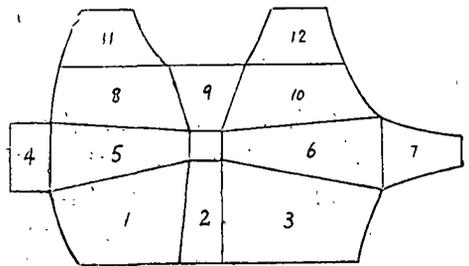


图 2

点和四条边中点顺时针方向取作八个结点，在该四边形中建立局部坐标 (ξ, η) ，令四条边上的 ξ 与 η 值分别为 ± 1 ，则八个结点在局部坐标系 (ξ, η) 中的坐标如图三所示。作“等参数”坐标变换

$$\left. \begin{aligned} r &= \sum_{i=1}^8 N_i r_i \\ z &= \sum_{i=1}^8 N_i z_i \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

其中

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1) \\ N_2 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \\ N_3 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1) \\ N_4 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ N_5 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\ N_6 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\ N_7 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\ N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

N_i 也就是八结点曲线四边形的形状函数， N_i 在结点 i 的值为 1，在其余结点的值则为零。

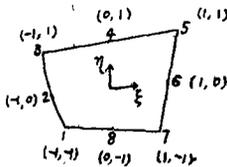


图 3

进行了上述“等参数”坐标后，局部坐标系 (ξ, η) 与整体坐标系 (r, z) 间建立了一一对应关系，于是，只要给出八个结点的整体坐标值 (r_i, z_i) ($i=1, 2, \dots, 8$)，则该四边形块内任意一点 (ξ, η) 所对应的整体坐标 (r, z) ，可由式 (A.1) (A.2) 得到。

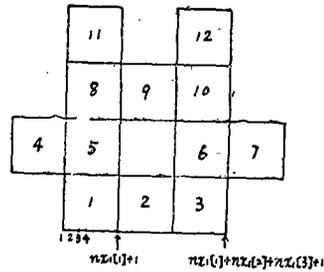


图 4

要在四边形内产生稠密的新网格，不仅要给出八个结点的坐标值，还要给出在 ξ, η 方向上进行再分割的分割线数目，分割线的交点即为新网格的结点。对于不等距分割情形，可以利用四边形在局部坐标系中的边“中点”对应整体坐标系中边的非中点来解决，即通过调整“中点”（如图三的点 2、4、6、8）位置来进行不等距分割。

假定在 $\eta = -1$ 的边上分割成 nx_1 段，该边上就有 $nx_1 + 1$ 个结点（即 $nx_1 + 1$ 列），在 $\eta = 1$ 的边上分割成 nx_2 段，该边上就有 $nx_2 + 1$ 个结点（ $nx_2 + 1$ 列），为使程序编制简单，令 $\xi = -1$ 和 $\xi = 1$ 两边上分割段数相同均为 ny 段，两边各有 $ny + 1$ 个结点（ $ny + 1$ 行），当 nx_1 与 nx_2 相同时称为 I 型块，当 $nx_1 < nx_2$ 时称为 II 型块，当 $nx_1 > nx_2$ 时称为 III 型块。新网格的结点由沿 η 方向分割的分割线（以后简称行）和沿 ξ 方向分割的分割线（以后简称为列）的交点组成。四边形块各条边上结点局部坐标值为：

$$\xi_{1j} = -1 + \frac{2}{nx_1}(j-1), \quad (j=1, 2, \dots, nx_1+1)$$

$$\xi_{1j} = 1 + 2(j-nx_1-1)/nx_2,$$

$$(\text{II型块}, nx_2+1 \geq j > nx_1+1),$$

$$\text{边 } \eta = 1: \eta_{2i} = 1,$$

$$\xi_{2j} = -1 + \frac{2}{nx_2}(j-1)$$

$$(j=1, 2, \dots, nx_2+1)$$

$$\xi_{2j} = 1 + 2(j-nx_2-1)/nx_1,$$

$$(\text{III型块}, nx_1+1 \geq j > nx_2+1)$$

$$\text{边 } \xi = -1:$$

$$\eta_{3j} = -1 + \frac{2}{ny}(j-1),$$

$$(j=1, 2, \dots, ny+1)$$

$$\xi_{3j} = -1$$

边 $\xi = 1$:

$$\eta_{4j} = -1 + \frac{2}{ny} (i-1), \quad (i=1, 2, \dots, ny+1)$$

$$\xi_{4j} = 1, \quad (A.3)$$

四边形块中第*i*行第*j*列结点坐标值 (ξ, η) 由点 (ξ_{1j}, η_{1j}) 与点 (ξ_{2j}, η_{2j}) 的连线和点 (ξ_{3j}, η_{3j}) 与点 (ξ_{4j}, η_{4j}) 的连线相交求得为

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\xi_{2j} - \xi_{1j}}{2} (\eta_{3j} + 1) + \xi_{1j} \\ \eta &= -1 + (i-1)/ny \end{aligned} \right\} (A.4)$$

该点对应的整体坐标值 (r, z) 可由 (A.1), (A.2) 求得, 以 $r[i, j], z[i, j]$ 表示。

如果四边形是直线边界或圆弧线的特殊情况, 则并不一定要作“等参数”坐标变换, 可直接利用两直线相交或圆弧与直线相交的交点, 定出新网格结点坐标值。

2. 单元及结点的编号

把图二所示的图形十二块分别通过“等参数”坐标变换变换到图四所示的图形。

前面已假定了同一块内沿 η 方向分割段数相同, 因此在图四中, η 方向具有相同分割段数的 1、2、3 块, 4、5、6、7 块, 8、9、10 块, 11、12、

块各组成一组, 即该图形划分为四大组, 以 n_l 表示图形划分的组数。

为了适合于紧凑存贮的迭代解法, 节省计算机存贮量, 要求结点号码适当编排, 我们规定按组逐行逐列编结点号码, 如图四所示。

各组沿 η 方向的分割段数以 $ny[q]$ 表示, ($q=1, 2, \dots, n_l$), 第 q 组包含的四边形块数以 $nc[q]$ 表示, 例如图四中 $nc[1] = 3$, 每组的起始块编号 $n_1[q] = n_2[q-1] + 1$, 每组的末块编号 $n_2[q] = n_2[q-1] + nc[q]$, 这里 $n_1[1] = 1, n_2[1] = nc[1]$ 。

下面将给出任一四边形块内三角形单元总数, 单元在块内相对编号, 结点数等的计算公式。第 q 组第 n 个四边形块, 沿 η 方向分割段数为 $ny[q]$, 沿 ξ 方向分割段数至少为 $nx[n]$, 为使程序简化, 假定 II 型块每行的分割段数是逐行增加一段, 即在 $\eta = -1$ 的边上的分割段数 $nx_1[n] = nx[n]$, 在 $\eta = 1$ 边上的分割段数 $nx_2[n] = nx[n] + ny[q]$, III 型块每行的分割段数是逐行减少一段, 即 $nx_1[n] = nx[n] + ny[q], nx_2[n] = nx[n]$ I 型块 $nx_1[n] = nx_2[n] = nx[n]$ 第 q 组第 n 块三角形单元总数以 $n_{te}[n]$ 表示, 则

$$\text{I 型块 } n_{te}[n] = 2ny[q]nx[n] \quad (A.5)$$

$$\text{II, III 型块 } n_{te}[n] = 2ny[q]nx[n] + (ny[q])^2$$

第 q 组第 n 块第*i*条(第*i*行与第*i*+1行所围区域, $i=1, 2, \dots, ny[q]$)的起始三角形单元编号以 $t_1[i]$ 表示, 末三角形单元编号以 $t_2[i]$ 表示(在该块内的相对编号)

$$\text{I 型: } t_1[i] = 1 + 2(i-1)nx[n], t_2[i] = 2inx[n],$$

$$\text{II 型: } t_1[i] = 1 + 2(i-1)nx[n] + (i-1)^2, t_2[i] = 2inx[n] + i^2,$$

$$\text{III 型: } t_1[i] = 1 + 2(i-1)(nx[n] + ny[q]) - (i-1)^2,$$

$$t_2[i] = 2i(nx[n] + ny[q]) - i^2 \quad (A.6)$$

第 q 组第 n 块第*i*行分割段数以 $np[q, n, i]$ 表示,

$$\text{I 型 } np[q, n, i] = nx[n],$$

$$\text{II 型 } np[q, n, i] = nx[n] + i - 1$$

$$\text{III 型 } np[q, n, i] = nx[n] + ny[q] - i + 1$$

块内三角形单元编号 t 与所对应行号 i , 列号 j 有以下关系

$$\text{I 型 } j = \text{integer} \left(\frac{t+1}{2} \right) - (i-1)nx[n]$$

$$\text{II 型 } j = \text{integer} \left(\frac{t+1-2(i-1)nx[n]-(i-1)^2}{2} \right) \quad (A.8)$$

$$\text{III 型 } j = \text{integer} \left(\frac{t+1-2(i-1)(nx[n]+ny[q])+(i-1)^2}{2} \right)$$

第 $q+1$ 组以前的结点总数(不包括与 $q+1$ 组公共行的结点数)以 $n_t[q]$ 表示

$$\begin{aligned}
 nt [q] = & nt [q-1] + \sum_{i=1}^{ny [q]} \left(1 + \sum_{m=n_1 [q]}^{n_2 [q]} [q, n, i] \right) + \sum_{m=n_1 [q]}^{n_2 [q]} KB [m] \\
 & + \sum_{i=2}^{ny [q]} \sum_{m=n_1 [q]+1}^{n_2 [q]} \delta (KB [m]) + Jd [q] \quad (A.9)
 \end{aligned}$$

其中 $KB [m]$, $Jd [q]$, $\delta (KB [m])$ 取值见注 (1)(2)(4)

第 i 行第 j 列与第 $i+1$ 行 $j+1$ 列所围四边形结点编号如图五所示, 其结点编号由以下各式求得

图五

$$\begin{aligned}
 P_1 = & \sum_{i_1=i}^{i-1} \left(1 + \sum_{m=n_1 [q]}^{n_2 [q]} np [q, m, i_1] \right) + j + nt [q-1] \\
 & + \sum_{m=n_1 [q]}^{n-1} np [q, m, i] + \sum_{m=n_1 [q]}^{n_2 [q]} KB [m] + Jd [q] \\
 & + \sum_{m=n_1 [q]+1}^n \delta (KB [m]) + (i-2) \sum_{m=n_1 [q]+1}^{n_2 [q]} \delta (KB [m]) \quad (\text{当 } i \neq 1 \text{ 时}),
 \end{aligned}$$

当 $i=1$ 时则 $p_1 = j + nt [q-1]$

$$+ \sum_{m=n_1 [q]}^{n-1} np [q, m, i] + \sum_{m=n_1 [q]}^n KB [m],$$

$p_2 = p_1 + 1$

$$\begin{aligned}
 p_3 = & \sum_{i_1=1}^i \left(1 + \sum_{m=n_1 [q]}^{n_2 [q]} np [q, m, i_1] \right) + j + nt [q-1] \\
 & + \sum_{m=n_1 [q]}^{n-1} np [q, m, i+1] + \sum_{m=n_1 [q]}^{n_2 [q]} KB [m] \\
 & + Jd [q] + \sum_{m=n_1 [q]+1}^n \delta (KB [m]) + (i-1) \sum_{m=n_1 [q]+1}^{n_2 [q]} (KB [m]) + KA,
 \end{aligned}$$

$$\text{其中 } KA = \begin{cases} \sum_{m=n_1 [q]}^n KA [m], & (t \geq t_1 [ny [q]]) \\ 0 & (t < t_1 [ny [q]]) \end{cases}$$

$KA [m]$ 见注 (3)

$p_4 = p_3 + 1$,

结点 p_1, p_2, p_3, p_4 的坐标值为

$$\begin{aligned} r [p_1] &= r [i, i] \\ r [p_2] &= r [i, j+1], \\ r [p_3] &= r [i+1, j] \\ r [p_4] &= r [i+1, j+1], \end{aligned}$$

这里 $r [i, j], z [i, j]$ 由 (A.1) — (A.4) 求得, 将四边形 ($p_1 p_2 p_3 p_4$ 连线) 以其较短对角线分成两个三角形单元, 令 d_{23} 为 F_2, F_3 连线的长度, d_{14} 为点 p_1, p_4 连线的长度, 按三角形单元结点逆时针编号, 则

若 t , (当 $i=1$ 时) 或 $t-t_2 [i-1]$, (当 $i>1$ 时) 为奇数号

当 $d_{23} \geq d_{14}$ 时, 三角形单元结点取 p_1, p_2, p_3 ,

当 $d_{23} < d_{14}$ 时, 三角形单元结点取 p_1, p_4, p_3 ,

若 t (当 $i=1$) 或 $t-t_2 [i-1]$ (当 $i>1$) 为偶数号,

当 $d_{23} \leq d_{14}$ 时, 三角形单元结点取 p_2, p_4, p_3 ,

当 $d_{23} > d_{14}$ 时, 三角形单元结点取 p_1, p_2, p_4 ,

若 $t=t_2 [i]$, 则对 II 型块取 p_1, p_4, p_3 对 III 型块取 p_1, p_2, p_3 。这样, 第 q 组第 n 块第 i 行再分割形成的三角形单元、结点号码和结点坐标值便可得到。

$$\begin{aligned} \text{结点总数} &= n t [n_1] + \sum_{m=n_1 [n_1]}^{n_2 [n_1]} (1 + n p \\ &\quad [n_1, m, n y [n_1] + 1]) \\ &+ \sum_{m=n_1 [n_1] + 1}^{n_2 [n_1]} \delta (K B [m]) \end{aligned}$$

注: 由于两组之间有公共结点, 例如第 q 组末行与第 $q+1$ 组始行是公共的, 在这行中的结点有公共的, 亦有只属某一组的, 为此在结点编号中, 引进了一些特殊项如下

(1) $J d [q]$: 若第 q 组第一行末结点与第 $q-1$ 组末行末结点不重合, 前号码小于后者号码时, $J d [q]$ 表示两者编号的差值, 否则 $J d [q]$ 为零, 例如如图四

$$\begin{aligned} z [p_1] &= z [i, j], \\ z [p_2] &= z [i, j+1], \\ z [p_3] &= z [i+1, j], \\ z [p_4] &= z [i+1, j+1], \end{aligned}$$

中, $J d [q] = J d [8] = n x_2 [7]$, ($q=8$ 时)

(2) $K B [n]$: 若第 q 组第 n 块第一行始结点编号大于同组中第 $n-1$ 块在该行的末结点号或当第 $n-1$ 块不在该组时而它大于第 $q-1$ 组末行始结点号时, $K B [n]$ 表示两者的差值, 否则 $K B [n]$ 为零, 例如 $K B [6] = n x_2 [2]$, $K B [8] = n x_2 [4]$

(3) $K A [n]$: 若第 q 组第 n 块末行始结点编号大于同组中第 $n-1$ 块末行末结点编号或当第 $n-1$ 块不在该组时而它大于第 $q+1$ 组第一行始结点编号时, 以 $K A [n]$ 表示前者跳过的结点个数, 否则 $K A [n]$ 为零, 例如 $K A [6] = n x_1 [9] - 1$, $K A [1] = n x_1 [4]$

$$(4) \delta (A B [m]) = \begin{cases} 1, & (K B [m] \neq 0) \\ 0, & (K B [m] = 0) \end{cases}$$

参 考 文 献

- [1] O.C.Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science" 1971.
- [2] 华东水利学院, "弹性力学问题的有限单元法" 1974
- [3] O.C.Zienkiewicz, D.V.Phillips, "An automatic mesh generation scheme for plane and curved surface by isoparametric coordinates", International Journal for numerical methods in Engineering, Vol. 3. 1971
- [4] 北航 "发动机涡轮轴应力分析" 1975
- [5] E.L.Wilson, "Structural analysis of axisymmetric solid", J.A.I.A. A. 3. 1965