环筋园柱壳静水压力作用下整体弹性屈曲

力学所十二室板壳组

一、引　　言

环筋园柱壳在静水压力作用下弹性整体失稳问题已有较多人进行了研究。一般以材料的正交各向异性壳来处理，并采用扁壳假定，例如Bodner[2]把环筋壳折合为单层正交异性壳，即不能考虑环筋的偏心影响，同时也不知道扁壳近似将带来多大的误差。Singer 等〔3〕〔4〕曾分析并计算了偏心效应，但仍采用了扁壳近似。

本文采用Flügge[1]将环筋园柱壳当作一多层壳处理的理论，考虑了环筋的偏心影响，推导出环筋园柱壳在静水压力作用下计算临界载荷的弹性整体失稳方程；同时推导出扁薄壳、薄壳等简化情形的弹性整体失稳临界载荷公式。本文还对 Meck[5] 的近似公式作一偏心效应的修正，给出较简单的环筋园柱壳在静水压力作用下考虑偏心影响的弹性整体失稳临界载荷的简化公式。

本文在常用尺寸范围，作了大量计算，将各种简化假定的计算结果与较精确的Flügge理论的结果进行了比较和讨论。

计算结果表明在常用参数范围内简化公式（5·2）与较精确的Flügge理论结果比较在10%以内符合，因此在工程计算中推荐用（5·2）的简化公式，同时看到当周向波数$n \leq 3$时由扁壳假设产生的误差可达10%以上。关于偏心效应的计算结果表明在静水压力作用下，内加环筋园柱壳比外加环筋园柱壳有较高的临界压力。

二、符　　号

L　园柱壳长度

R　园柱壳中面半径

h　园柱壳厚度

A　环筋横截面积

I_0　环筋截面对其形心的惯性矩

t　环筋形心至壳中面距离

l　环筋中心间距

Ic　环筋壳组合惯性矩$I_c=\frac{lh^3}{12}+I_0+At^2\frac{1}{1+\frac{A}{lh}}$

p　静水压力

u、v、w　壳中面的轴向、周向、径向位移

x、θ、z　轴向、周向、径向座标

$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial x}$：X方向壳中面拉伸应变

$\varepsilon_2=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}-w\right)$：θ方向壳中面拉伸应变

$\gamma=\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}$：中面剪应变

$\chi_1=\frac{\partial w}{\partial x^2}$：X方向壳中面曲率变化

$\chi_2=\frac{1}{R^2}\left(w+\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)$：θ方向壳中面曲率变化

$\chi_{12}=\frac{\partial^2 w}{R\partial\theta\partial x}-\frac{1}{2R^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{2R}\frac{\partial v}{\partial x}$：中面扭曲率变化

ε_x、ε_θ、$\gamma_{x\theta}$：壳轴向、周向拉伸应变及剪应变

N_x、N_θ、$N_{x\theta}$、$N_{\theta x}$：环筋园柱壳截面每单位长度的力

M_x、M_θ、$M_{x\theta}$、$M_{\theta x}$：环筋园柱壳每单位长度截面的力矩

Q_θ：横剪力

E、ν：材料场氏模量、泊桑比

D：壳抗拉刚度　　$D=\frac{Eh}{1-\nu^2}$

K：壳抗弯刚度　　$K=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

m：纵向半波数

n：周向波数

$\bar{p}=\frac{pR}{Eh}(1-\nu^2)$；载荷无量纲参数

p_{cr} 临界静水压力

$D_\theta=\frac{Eh}{1-\nu^2}+\frac{EA}{l}$

$k=\frac{h^2}{12R^2}$

$A_1=(1-\nu^2)\frac{A}{lh}\frac{h}{R}$

$A_2=(1-\nu^2)\left(\frac{I_0}{lh^3}\frac{h^2}{R^2}+\frac{A}{lh}\frac{t^2}{R^2}\right)$

$M=\frac{m\pi R}{L}$

应变位移关系：

$$\left\{\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\varepsilon_1-z\chi_1=\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\
&\varepsilon_\theta=\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{w}{R-z}-\frac{z}{R(R-z)}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\\
&\gamma_{x\theta}=\frac{1}{R-z}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{R-z}{R}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial x}\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{R-z}\right)
\end{aligned}\right.\qquad(1.1)$$

应力应变关系：

$$\left\{\begin{aligned}
&\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_\theta)\\
&\sigma_\theta=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta+\nu\varepsilon_x)\\
&\tau_{x\theta}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{x\theta}
\end{aligned}\right.\qquad(1.2)$$

内力、内力矩：

$$\left\{\begin{aligned}
&N_x=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x\left(1-\frac{z}{R}\right)dz\\
&N_\theta=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_\theta dz+\frac{EA}{l}\varepsilon_\theta\\
&N_{x\theta}=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{x\theta}\left(1-\frac{z}{R}\right)dz\\
&N_{\theta x}=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{\theta x}\,dz\\
&M_\theta=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_\theta z dz+\frac{E}{l}\int_A\varepsilon_\theta\, z\, dA
\end{aligned}\right.\qquad(1.3)$$

$\bar{\chi}_2=\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}$，$\bar{\chi}_1=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

$\bar{\chi}_{12}=\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta}$

三、临界载荷的确定

座标取在壳中面上，园柱壳轴向X、周向θ、径向（向内为正）Z。

1、从Flügge理论出发的方程推导

基本假定：

（1）直法线假定

（2）$\sigma z \ll \sigma x$、$\sigma\theta$

（3）屈曲前壳体处于薄膜应力状态

（4）环筋与壳体作为多层壳体处理。

（5）忽略环筋扭转刚度

$$\begin{cases} M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{R}\right) z\, dz \\ M_{\theta x} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta x}\, z\, dz \\ M_{\theta x} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{x\theta}\, z \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz \end{cases}$$

得到：

环筋壳内力、内力矩

$$N_x = D\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R}\right)\right) + \frac{K}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = D(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) + \frac{K}{R}\chi_1$$

$$N_\theta = D_\theta\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R}\right) + D\nu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{K}{R}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{w}{R^2}\right)$$

$$+\frac{EA}{l}\left(-\frac{tw}{R^2} - \left(\frac{t}{R^2} + \frac{t^2}{R^3}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)$$

$$= D_\theta\varepsilon_2 + \nu D\varepsilon_1 - \frac{K}{R}\chi_2 - \frac{EAt}{l}\left(\chi_2 + \frac{t}{R^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)$$

$$N_{\theta x} = \frac{1-\nu}{2}D\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1-\nu}{2}\frac{K}{R^3}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - R\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x}\right) = \frac{1-\nu}{2}D\gamma + \frac{(1-\nu)}{2R}K\left(-\chi_{12} + \frac{\gamma}{2R}\right)$$

$$N_{x\theta} = \frac{1-\nu}{2}D\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1-\nu}{2}\frac{K}{R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}\right)$$

$$= \frac{1-\nu}{2}D\gamma + \frac{1-\nu}{2R}K\left(\chi_{12} + \frac{\gamma}{2R}\right)$$

$$M_x = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = -K\left(\chi_1 + \nu\chi + \frac{\varepsilon_1 + \gamma\varepsilon_2}{R}\right)$$

$$M_\theta = -K\left(\frac{w}{R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{EAt}{l}\left(\frac{\frac{\partial v}{\partial \theta} - w}{R}\right)$$

$$-\frac{E}{lR^2}(I_0 + t^2 A)\left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) - \frac{E}{lR^3}(3tI_0 + t^3 A)\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

$$= -K(\chi_2 + \nu\chi_1) + \frac{EAt}{l}\varepsilon_2 - \frac{E}{l}(I_0 + t^2 A)\chi_2 - \frac{E}{lR^3}(3tI_0 + t^3 A)\frac{\partial^2 w}{\partial^2 \theta}$$

$$M_{x\theta} = -(1-\nu)K\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x}\right) = -(1-\nu)K\left(\chi_{12} + \frac{\gamma}{2R}\right)$$

$$M_{x\theta} = \frac{1-\nu}{2}K\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x}\right) = -(1-\nu)K\chi_{12}$$

园柱壳静水压力作用下平衡方程：

$$\begin{cases} R\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta}-p\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+R\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{pR^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \\ R\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x}+\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta}-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta}+R\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x}\right)-p\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}-\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)-\frac{pR^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \\ \frac{1}{R}\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x\partial \theta}+\frac{\partial^2 M_{\theta x}}{\partial x\partial \theta}+R\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+N_\theta+p\left(R\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)-\frac{pR^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \end{cases} \tag{15}$$

选择满足简支边界条件　$N_x=v=w=M_x=0$　的挠度函数

$$\begin{aligned} u&=U\sin n\theta\cos\frac{m\pi}{L}x \\ v&=V\cos n\theta\sin\frac{m\pi}{L}x \\ w&=W\sin n\theta\sin\frac{m\pi}{L}x \end{aligned} \tag{1.6}$$

代入（1.4）（1.5）得到U、V、W的三个线性方程

$$(C_{ij})\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}=0 \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3)$$

各系数如下：

$$\begin{cases} C_{11}=-M^2-\frac{1-\nu}{2}(1+k)n^2+\left(\frac{M^2}{2}+n^2\right)\bar{p} \\ C_{12}=-\frac{1-\nu}{2}Mn \\ C_{13}=-\nu M-k\left(M^3-\frac{1-\nu}{2}Mn^2\right)-M\bar{p} \\ C_{21}=-\frac{1+\nu}{2}Mn=C_{12} \\ C_{22}=\left[A_1\left(1-\frac{R}{t}\right)-1\right]n^2-\frac{1-\nu}{2}(1+3k)M^2+\left(\frac{M^2}{2}+n^2\right)\bar{p} \\ C_{23}=\left[A_1\left(1+\frac{t}{R}\right)-A_2-3A_2\frac{t}{R}+2A_1\frac{t^2}{R^2}\right]n^3 \\ \qquad +\left(A_2-1-A_1\frac{R}{t}\right)n-\frac{3-\nu}{2}kM^2n+\bar{p}n \\ C_{31}=C_{13} \\ C_{32}=-\left(1+A_1\frac{R}{t}\right)n-\frac{3-\nu}{2}kM^2n+A_1n^3+\bar{p}n \\ C_{33}=-1-A_1\frac{R}{t}-k\left[(M^2+n^2)^2-2n^2+1\right]-\left[A_2+3A_2\frac{t}{R}-2A_1\frac{t^2}{R^2}\right]n^4 \\ \qquad +\left(2A_1+A_1\frac{t}{R}+A_2\right)n^2-A_1+\left(\frac{M^2}{2}+n^2\right)\bar{p} \end{cases} \tag{1.7}$$

由其系数行列式等于零便导出临界载荷方程：

$$|C_{ij}|=0 \tag{1.8}$$

（1·8）是 $\overline{p}$ 的三次方程，其最小根 $\overline{p}_{cr}$ 即为临界载荷参数，对应的m，n即为失稳时轴向半波数和周向波数。

2、扁薄壳近似下临界载荷公式

基本假定：除前一节所作基本假定外，还假设：

（1）在（1·1）和（1·3）中，$\frac{z}{R}$ 相对1可以忽略，这同时反映了扁壳与薄壳的假设

（2）在平衡方程（1·5）第二式中忽略反映横剪力 Q_θ 的第三项，即忽略 $\frac{\partial M_\theta}{\partial\theta}+R\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x}$ 项，这也反映了扁壳假设

（3）假定 $\overline{p}\ll1$，$\frac{h^2}{R^2}\ll1$

由以上假设可得到环筋园柱壳内力、内力矩为：

$$\left\{\begin{aligned}
N_x&=D\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{w}{R}\right)\right)=D(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2) \qquad (2.1)\\
N_\theta&=D_\theta\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{w}{R}\right)+\nu D\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{EAt}{l}\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}=D_\theta\varepsilon_2+\nu D\varepsilon_1-\frac{EAt}{l}\overline{\chi}_2\\
N_{x\theta}&=N_{\theta x}=\frac{1-\nu}{2}D\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{1-\nu}{2}D\gamma\\
M_x&=-K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)=-K(\chi_1+\nu\overline{\chi}_2)\\
M_\theta&=-K\left(\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\theta^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{EAt}{l}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{w}{R}\right)-\frac{E}{l}(I_0+t^2A)\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\theta^2}\\
&=-k(\overline{\chi}_2-\chi\nu_1)+\frac{EAt}{l}\varepsilon_2-\frac{E}{l}(I_0+t^2A)\overline{\chi}_2\\
M_{x\theta}&=M_{\theta x}=-(1-\nu)K\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta}=-(1-\nu)K\overline{\chi}_{12}
\end{aligned}\right.$$

园柱壳静水压力作用下 Donnell 平衡方程

$$\left\{\begin{aligned}
&R\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial\theta}=0\\
&R\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x}+\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta}=0\\
&R\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_{\theta x}}{\partial x\partial\theta}+\frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x\partial\theta}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial\theta^2}+N_\theta-p\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-\frac{pR^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0
\end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

选择满足简支边条件的挠度函数（1.6），代入（2.1）（2.2）同样可求得临界载荷公式，以 $\overline{p}^{(2)}$ 表示扁薄壳近似下载荷无量纲参数，得到临界载荷公式为

$$\overline{p}^{(2)}=\frac{1}{\frac{M^2}{2}+n^2}\left(C'_1+\frac{C'_2}{C'_3}\right) \tag{2.3}$$

其中

$$C_1' = k\,(M^2+n^2)^2 + 1 + A_2 n^4 - 2A_1 n^2 + A_1\frac{R}{t}$$

$$C'_2 = -\frac{1-\nu}{2}\left[(M^2+n^2)^2 - (1-\nu^2)M^4\right] + S_1'$$

$$C_3' = \frac{1-\nu}{2}(M^2+n^2)^2 + \left(M^2+\frac{1-\nu}{2}n^2\right)n^2 A_1\frac{R}{t}$$

$$S_1' = \left(M^2+\frac{1-\nu}{2}n^2\right)n^2\left[-A_1\frac{R}{t}\left(2+A_1\frac{R}{t}\right)+2A_1\left(1+A_1\frac{R}{t}\right)n^2 - A_1^2 n^4\right] + \nu A_1\frac{R}{t}M^2n^2 - \nu A_1(1+\nu)M^2n^4$$

在没有环筋的情形下，（2·3）化为 Mises 公式

3、薄壳近似下临界载荷公式

基本假定：在前一节（第2节）的基础上，保留平衡方程（1·5）式第二式中反映横剪力 Q_θ 的第三项，并保留由挠度w所引起的θ方向曲率变化 $\frac{w}{R^2}$，这两项是通常扁壳假定所忽略的项。于是环筋园柱壳内力、内力矩为

$$\left\{\begin{aligned}
N_x &= D\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{w}{R}\right)\right) = D(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2)\\
N_\theta &= D_\theta\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{w}{R}\right)+\nu D\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{EAt}{l}\left(\frac{w}{R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\\
&= D_\theta\varepsilon_2+\nu D\varepsilon_1-\frac{EAt}{l}\chi_2\\
N_{x\theta} &= N_{\theta x} = \frac{1-\nu}{2}D\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1-\nu}{2}D\gamma\\
M_x &= -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\left(\frac{w}{R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right) = -K(\chi_1+\nu\chi_2)\\
M_\theta &= -K\left(\frac{1}{R^2}\left(w+\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{EAt}{l}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{w}{R}\right)\\
&\quad -\frac{E(I_0+t^2A)}{lR^2}\left(w+\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\\
&= -K(\chi_2+\nu\chi_1)+\frac{EAt}{l}\varepsilon_2-\frac{E}{l}(I_0+t^2A)\chi_2\\
M_{x\theta} &= M_{\theta x} = -K(1-\nu)\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta} = -K(1-\nu)\bar{\chi}_{12}
\end{aligned}\right. \tag{3.1}$$

平衡方程

$$\left\{\begin{aligned}
&R\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial\theta}=0\\
&R\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x}+\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta}-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial M_\theta}{\partial\theta}+R\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x}\right)=0\\
&R\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x\partial\theta}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial\theta^2}+N_\theta-p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+w\right)-\frac{pR^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0
\end{aligned}\right. \tag{3.2}$$

同样，选择挠度函数（1·6），以 $\bar{p}^{(3)}$ 表示此种近似下载荷无量纲参数，临界载荷近似公式为

$$\bar{p}^{(3)}=\frac{1}{\frac{M^2}{2}+n^2-1}\left(C_1+\frac{C_2}{C_3}\right) \tag{3.3}$$

其中

$$C_1=k\,(M^2+n^2)^2+1-k\,(\nu M^2+n^2)+A_2n^4-2A_1n^2+A_1\frac{R}{t}-A_2n^2+A_1$$

$$C_2=-\frac{1-\nu}{2}\left[(M^2+n^2)^2-(1-\nu^2)M^4\right]-\frac{1-\nu}{2}k\,n^2\left[(1+\nu)M^2(M^2+n^2)+(M^2+n^2)^2\right]+S_1$$

$$C_3=\frac{1-\nu}{2}(M^2+n^2)^2+\left(M^2+\frac{1-\nu}{2}n^2\right)n^2A_1\left(\frac{R}{t}-1\right)$$

$$S_1=\left(M^2+\frac{1-\nu}{2}n^2\right)n^2\left\{\left[\left(1+A_1\frac{R}{t}\right)\left(A_2-A_1\frac{R}{t}\right)-A_1\frac{R}{t}\right]+\left[\left(1+A_1\frac{R}{t}\right)(2A_1-A_2)-A_1A_2\right]n^2+A_1(A_2-A_1)n^4+kA_1(M^2+n^2)\left(n^2-\frac{R}{t}\right)\right\}+\left(\nu A_1\frac{R}{t}+\nu^2A_1-\frac{\nu+\nu^2}{2}A_2\right)M^2n^2+\frac{\nu+\nu^2}{2}(A_2-2A_1)M^2n^4$$

4、考虑了横剪力 Q_θ 但忽略 $\frac{w}{R^2}$ 的临界载荷近似公式

基本假定：在第2节的基础上，对平衡方程考虑了横剪力 Q_θ。环筋园柱壳内力和力矩仍采用（2·1）式。

平衡方程：

$$R\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta}=0$$

$$R\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x}+\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta}-\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta}=0 \tag{4.1}$$

$$R\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x\partial \theta}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2}+N_\theta-p\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}-\frac{pR^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

同样选择挠度函数（1·6），求得临界载荷公式，以 $\bar{p}^{(4)}$ 表示这种近似下载荷无量纲参数

$$\bar{p}^{(4)}=\frac{1}{\frac{M^2}{2}+n^2}\left(C_1''+\frac{C_2''}{C_3''}\right) \tag{4.2}$$

其中

$$C_1''=k\,(M^2+n^2)^2+1+A_2n^4-2A_1n^2+A_1\frac{R}{t}$$

$$C_2''=-\frac{1-\nu}{2}\left[(M^2+n^2)^2-(1-\nu^2)M^4\right]-\frac{1-\nu}{2}k\,n^2\left[(M^2+n^2)^2\right.$$

$$+ (1+\nu) M^2 (M^2+n^2) \Big] + S_1''$$

$$C_3'' = \frac{1-\nu}{2} (M^2+n^2)^2 + \left(M^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2\right) n^2 A_1 \left(\frac{R}{t} - 1\right)$$

$$S_1'' = \left(M^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2\right) n^2 \Big\{ \Big[\left(1 + A_1\frac{R}{t}\right) \left(A_1 - A_1\frac{R}{t}\right) - A_1\frac{R}{t} \Big]$$

$$+ \Big[\left(1 + A_1\frac{R}{t}\right) (2A_1 - A_2) - A_1^2 \Big] n^2 + A_1 (A_2 - A_1) n^4$$

$$+ kA_1 (M^2+n^2) \left(n^2 - \frac{R}{t}\right) \Big\} + \left(\nu A_1\frac{R}{t} + \nu^2\frac{A_1}{2} - \frac{\nu A_1}{2}\right)$$

$$M^2 n^2 + \frac{\nu+\nu^2}{2} (A_2 - 2A_1) M^2 n^4$$

5、简化公式

Meck[5]给出的环筋园柱壳在静水压力作用下弹性整体失稳的临界载荷，由园柱壳拉伸刚度和环弯曲刚度来表示，即

$$p = (n^2-1)\frac{EI}{R^3 l} + E\frac{h}{R}\frac{M^4}{\left(n^2-1+\frac{M^2}{2}\right)(M^2+n^2)^2} \tag{5.1}$$

式中未能反映环筋的偏心效应。

这里，我们对环弯曲刚度项稍作修正，（5.1）式中I取环筋壳的组合惯性矩Ic，并以环筋形心到园柱壳中心轴的距离R_t（这里$R_t = R - t$）代替该项中R，得到

$$p = (n^2-1)\frac{EIc}{(R-t)^3 l} + E\frac{h}{R}\frac{M^4}{\left(n^2-1+\frac{M^2}{2}\right)(M^2+n^2)^2}$$

以$\bar{p}^{(5)}$表示简化公式下载荷无纲参数，

$$\bar{p}^{(5)} = (1-\nu^2)(n^2-1)\frac{IcR}{(R-t)^3 lh} + (1-\nu^2)\frac{M^4}{\left(n^2-1+\frac{M^2}{2}\right)(M^2+n^2)^2} \tag{5.2}$$

四、计算结果与讨讨

本文采用从 Flügge 理论出发的较精确的方程（1·8）和近似公式（2·3）、（3·3）、（4·2）、（5·2）对常用参数范围作了大量计算，（$\frac{L}{R}$ 取2到5间的值，$\frac{h}{R}$取0.007到0.01间的值，偏心距参数 $\left|\frac{t}{h}\right| \le 5.5$，$\frac{A}{lh} \le 0.5$，$\frac{I_0}{lh^3} \le 4.2$）并计算了 Bodner 模型五种[2]以及一组实验参数[6]。

为便于分析，部分结果列入表一——表六。由于篇幅所限，大量计算结果没有列出，仅给出结果的分析讨论。

取近似公式（2·3）、（3·3）、（4·2）、（5·2）的计算结果 $\bar{p}_{cr}^{(i)}$与较精确的方程（1·8）的结果$\bar{p}_{cr}$相比的相对误差为E_i。（$E_i = \frac{\bar{p}_{cr}^{(i)} - \bar{p}_{cr}}{\bar{p}_{cr}}$，$i = 2, 3, 4, 5$，）

计算表明在常用参数范围内，当轴向半波数m为1时，求得环筋园柱壳均匀静水压力作用下的最低临界压力，并有以下结论：

1、计算表明一般对外环筋环壳，$E_5 > 0$，即（5·2）式的结果 $\bar{p}_{cr}^{(5)}$与精确结果$\bar{p}_{cr}$比较偏大，对内环筋一般$E_5 < 0$，即（5·2）的结果与精确结果$\bar{p}_{cr}$相比较偏小，当环筋很弱时（例如环筋壳组合

惯性矩无量纲参数$\frac{I_c}{Rh^3}<0.4$），不管是外环筋或是内环筋情形，通常$\bar{p}_{cr}^{(5)}$均比$\bar{p}_{cr}$小，且在非常用范围时（例如$\frac{I_c}{lh^3}<0.14$）$|E_5|$会超过10%，在没有环筋的极端情形下误差值$|E_5|$达到最大值，其值与壳长、壳厚有关，壳越短越厚$|E_5|$越大，表四给出这些非常用参数范围极端情形的部分结果。例如$\frac{L}{R}=2$，$\frac{h}{R}=0.02$的无环筋情形下，$E_5=-16.15\%$。但大量计算表明在常用参数范围内简化公式（5·2）的结果$\bar{p}_{cr}^{(5)}$与较精确的方程（1·8）的结果$\bar{p}_{cr}$相比较在10%以内符合，因此在工程计算中推荐采用（5·2）的简洁公式。

2、大量计算表明，薄壳近似公式（3·3）计算结果的相对误差一般小于5%，最大不超过8%，因此（3·3）可代替较精确又较繁复的公式（1·8）。

3、关于扁壳近似公式（2·3）的适用范围，大量计算表明当周向波数n大于3时，由扁壳假设产生的误差E_{23} $\left(E_{23}=\frac{\bar{p}_{cr}^{(2)}-\bar{p}_{cr}^{(3)}}{\bar{p}_{cr}^{(3)}}\right)$小于5%，表一给出一部分周向波数$n\leq3$的结果，从表一看出对n等于3和2时扁壳近似公式式（2·3）的误差E_{23}可达10%以上。同时大量计算表明，对于考虑横剪力Q_0影响．而忽略曲率变化中的$\frac{w}{R^2}$项的近似公式

表一　　周向波数$n\leq3$的部分计算结果

$\frac{L}{R}$	$\frac{h}{R}$	$\frac{t}{h}$	$\frac{A}{lh}$	$\frac{I_c}{lh^3}$	n	$\bar{p}_{cr}^{(2)}$	$\bar{p}_{cr}^{(3)}$	$\bar{p}_{cr}^{(4)}$	$\frac{\bar{p}_{cr}^{(2)}-\bar{p}_{cr}^{(3)}}{\bar{p}_{cr}^{(3)}}$ (%)	$\frac{\bar{p}_{cr}^{(4)}-\bar{p}_{cr}^{(3)}}{\bar{p}_{cr}^{(3)}}$ (%)
5	0.007	−2.5	0.3	0.4	3	0.0008726	0.0008038	0.0007882	8.56	−1.94
	0.0085	−2.5	0.3	0.4	3	0.0012222	0.0011096	0.0010958	10.1	−1.24
	0.01	−2.5	0.3	0.4	3	0.0016425	0.0014772	0.0014654	11.2	−0.80
	0.007	−4	0.3	1.225	3	0.0020475	0.0018313	0.0018210	11.8	−0.56
	0.007	−4	0.4	1.633	3	0.0025355	0.0022547	0.0022470	12.4	−0.34
	0.01	−4.5	0.4	2.133	2	0.0042006	0.0039941	0.0035146	5.17	−12.0
	0.01	−5	0.4	2.7	2	0.0048313	0.0044387	0.0039712	8.85	−10.5
	0.0085	−5.5	0.5	4.1667	2	0.0049471	0.0045125	0.0040495	9.63	−10.3
	0.01	−5	0.5	3.375	2	0.0054206	0.0048448	0.0043911	11.9	−9.36
	0.01	−5.5	0.5	4.1667	2	0.006261	0.0054356	0.0049971	16.5	−8.07
4	0.007	−2.5	0.3	0.4	3	0.0010683	0.0010273	0.0009863	3.99	−3.99
	0.0085	−2.5	0.3	0.4	3	0.0014083	0.0013236	0.001285	6.4	−2.92
	0.01	−2.5	0.3	0.4	3	0.0018182	0.001681	0.001645	8.16	−2.14
	0.007	−4	0.4	1.633	3	0.0026816	0.0024294	0.0023994	10.4	−1.24
	0.01	−3.5	0.4	1.2	3	0.0040021	0.0035763	0.003539	11.9	−0.63
	0.0085	−5	0.4	2.7	3	0.0058534	0.0051812	0.0051682	13.0	−0.25

（4·2）的误差E_{43} $\left(E_{43}=\dfrac{\bar{p}_{cr}{}^{(4)}-\bar{p}_{cr}{}^{(3)}}{\bar{p}_{cr}{}^{(3)}}\right)$ 当周向波数$n\geqslant 3$时均小于5％，只有当$n=2$时E_{43}才会达到10％以上，这说明只有在$n=2$的情形，由$\dfrac{w}{R^2}$引起的曲率变化项才不能忽略。

4、关于偏心效应，在我们所计算的大量常用参数范围内，在静水压力作用下，内加环筋园柱壳有较高的临界压力。

（1）偏心距$\left|\dfrac{t}{h}\right|$的影响：在$\dfrac{L}{R}$、$\dfrac{h}{R}$、$\dfrac{A}{lh}$、$\dfrac{I_0}{lh^3}$取值不变时，由表二知道，偏心距越大，临界载荷越高；用$\bar{p}_内$和$\bar{p}_外$表示内加环筋园柱壳和外加环筋园柱壳的临界载荷参数，偏心距越大，$\bar{p}_内/\bar{p}_外$越大；在我们计算的参数范围内$\bar{p}_内/\bar{p}_外$可达1.3。同时看到当$\dfrac{t}{R}=0$，即环筋形心在壳中面上时临界载荷最低。

（2）环筋惯性矩（I_0）的影响：从表二看出，在$\dfrac{L}{R}$、$\dfrac{h}{R}$、$\dfrac{A}{lh}$、$\left|\dfrac{t}{h}\right|$取值不变时，增加惯性矩$I_0$能提高临界载荷，但对内，外加环筋壳的临界载荷比值$\bar{p}_内/\bar{p}_外$影响不大。

（3）壳长度与壳半径比值$\dfrac{L}{R}$的影响：由表三看出当$\dfrac{L}{R}$增大时临界载荷下降，但对偏心效应的影响不大。

（4）计算表明$\dfrac{A}{lh}$对临界载荷及偏心效应的影响不大。

5、与Bodner[2]计算结果的比较

表五列出对Bodner五种模型的计算结果，并给出Bodner的计算结果$\bar{p}_1$和$\bar{p}_3$，以及Singer[3]对其中两种模型的计算结果。

从计算结果看出，由于Bodner的计算不考虑环筋偏心效应，即外加环筋截面当作集中在中面上，其计算结果均比（1·8）的计算结果$\bar{p}_{cr}$大（对其模型A和B，甚至误差达20％），偏心距越大误差越大。我们看到Singer在扁壳近似下对其中两种模型的计算结果与这里按薄扁壳近似公式（2·3）计算的结果是完全一致的。

表二　　偏心效应影响的计算结果

	$\dfrac{I_0}{lh^3}$	$\left\|\dfrac{t}{h}\right\|$	0	0.5	1.5	2	3	4
$\dfrac{L}{R}=4$ $\dfrac{h}{R}=0.01$ $\dfrac{A}{hl}=0.3$ $n=8$	1	$\bar{p}_内$	0.0012345	0.0013161	0.0017358	0.0020745	0.0030206	0.0043361
		$\bar{p}_外$		0.0012333	0.0014716	0.0017083	0.0024041	0.0033877
		$\bar{p}_内/\bar{p}_外$		1.067	1.180	1.214	1.256	1.280
	2	$\bar{p}_内$	0.0019352	0.0020311	0.0024762	0.0028283	0.0037963	0.0051393
		$\bar{p}_外$		0.0019242	0.0021366	0.0023593	0.0030303	0.0039903
		$\bar{p}_内/\bar{p}_外$		1.056	1.159	1.199	1.253	1.288
	3	$\bar{p}_内$	0.0026401	0.0027441	0.003217	0.003579	0.0045808	0.0059473
		$\bar{p}_外$		0.0026113	0.0027999	0.0030107	0.0036589	0.0045964
		$\bar{p}_内/\bar{p}_外$		1.051	1.149	1.189	1.252	1.294
	4	$\bar{p}_内$	0.0033413	0.0034608	0.0039555	0.0043361	0.0053587	
		$\bar{p}_外$		0.0033007	0.0034668	0.0036669	0.0042816	
		$\bar{p}_内/\bar{p}_外$		1.049	1.141	1.182	1.252	

表三　$\frac{L}{R}$对偏心效应及临界载荷的影响

	L/R	$\left\vert\frac{t}{h}\right\vert$	$\frac{I_0}{lh^3}=2$			$\frac{I_0}{lh^3}=3$		
			0	1.5	3	0	1.5	3
$\frac{h}{R}=0.01$ $\frac{A}{lh}$	3	$p_{内}$	0.0027202	0.0032634	0.004567	0.0034013	0.0039832	0.0053199
		$p_{外}$		0.002891	0.0037366		0.0035376	0.0043499
		$p_{内}/p_{外}$		1.129	1.222		1.126	1.223
	4	$p_{内}$	0.0019352	0.0024762	0.0037963	0.0026401	0.003217	0.0045808
		$p_{外}$		0.0021366	0.0030303		0.0027999	0.0036589
		$p_{内}/p_{外}$		1.159	1.253		1.149	1.252

表四　不常用参数范围及无环筋情形下〔简化公式（5.2）误差较大〕的计算结果

$\frac{L}{R}$	$\frac{h}{R}$	$\frac{t}{h}$	$\frac{A}{lh}$	$\frac{I_0}{lh^3}$	$\frac{I_c}{lh^3}$	$\bar{p}_{cr}$	n	E_5(%)
5	0.007	0	0	0	0.0833	0.0000984	4	−8.03
	0.01	0	0	0	0.0833	0.0001645	4	−9.76
	0.02	0	0	0	0.0833	0.0004821	3	−9.01
4	0.01	1	0.03	0.003	0.116	0.0002632	4	−7.2
		−1	0.03	0.003	0.116	0.0002523	4	−6.9
		0	0	0	0.0833	0.0002145	4	−8.8
	0.015	1	0.03	0.003	0.116	0.0004865	4	−6.9
		−1	0.03	0.003	0.116	0.0004682	4	−10
		0	0	0	0.0833	0.0003801	4	−11.1
	0.02	1	0.03	0.003	0.116	0.0007985	4	−5.9
		−1	0.03	0.003	0.116	0.0007702	4	−12.2
		0	0	0	0.0833	0.0006122	4	−12.3
3	0.005	1	0.03	0.003	0.116	0.0001262	6	−8.3
		−1	0.03	0.003	0.116	0.0001218	6	−7.3
		0	0	0	0.0833	0.0000988	6	−10.2
	0.01	0.5	0.2	0.01667	0.1416	0.0004216	5	−10
		−0.5	0.2	0.01667	0.1416	0.0003887	5	−4.8
		0	0	0	0.0833	0.0002792	5	−11.4

表四　　(续)

$\frac{L}{R}$	$\frac{h}{R}$	$\frac{t}{h}$	$\frac{A}{lh}$	$\frac{I_0}{lh^3}$	$\frac{I_c}{lh^3}$	$\bar{p}_{cr}$	n	E_5(%)
3	0.02	1	0.03	0.003	0.116	0.0009846	4	−7.5
		−1	0.03	0.003	0.116	0.0009469	4	−11.8
		0	0	0	0.0833	0.0007953	4	−12.5
2	0.012	0.1	0.2	0.01	0.0950	0.0006258	6	−13.6
		−0.1	0.2	0.01	0.0950	0.0006149	6	−12.6
	0.005	0	0	0	0.0833	0.0001501	7	−11.1
	0.007	0	0	0	0.0833	0.0002537	7	−12.95
	0.01	0	0	0	0.0833	0.000426	6	−13.4
	0.015	0	0	0	0.0833	0.0008111	5	−13.63
	0.02	0	0	0	0.0833	0.0012153	5	−16.15

表五　　对 Bodner 模型[2]计算结果

L/R	4.5384		4.538	4.5391		4.538	3.4733
h/R	0.01205		0.01224	0.01217		0.01234	0.01217
t/h	−2.817	2.817	−2.198	−1.653	1.653	−1.071	−2.031
A/lh	0.2948		0.2183	0.1471		0.0718	0.2439
I_0/lh^3	0.5275		0.2095	0.06516		0.00782	0.1905
n	3	3	3	3	3	4	3
$\bar{p}_{cr}$	0.002503	0.0031367	0.0013898	0.000762	0.0009005	0.0004091	0.001730
$\bar{p}_{cr}^{(5)}$	0.002594	0.0031168	0.0014491	0.0007888	0.0008538	0.0003862	0.0018363
$\bar{p}_{cr}^{(2)}$	0.0029386	0.0032673	0.0015688	0.0008127	0.0009218	0.0004334	0.0018334
$\bar{p}_1^{*}$	0.003106		0.001670	0.0008699		0.004449	0.001984
$\bar{p}_3^{**}$	0.002689		0.001489	0.0008026		0.0004179	0.001825
$\bar{p}_5^{***}$	0.002938	0.003270		0.0008125	0.0009222		
E_5 (%)	3.64	−0.64	4.27	3.51	−5.1	−5.59	6.1
$E_1=\frac{\bar{p}_1-\bar{p}_{cr}}{\bar{p}_{cr}}$ (%)	24.1		20.2	14.2		8.75	14.7
$E_3=\frac{\bar{p}_3-\bar{p}_{cr}}{\bar{p}_{cr}}$ (%)	7.43		7.14	5.33		2.15	5.49

* 〔2〕计算中取 Le＝1 的结果　　** 〔2〕中 Le 由该文章公式（39）计算

***取〔3〕Singer 计算结果

表六　　与实验结果〔6〕的比较

$\frac{L}{R}$	$\frac{h}{R}$	$\frac{t}{h}$	$\frac{A}{lh}$	$\frac{I_0}{lh^3}$	$\frac{I_c}{lh^3}$	n	$\bar{p}_{cr}$	$\bar{p}_{cr}^{(6)}$	$\bar{p}e$	$\bar{p}_{cr}^{(6)}/\bar{p}e$
2.985	0.00663	−2.3856	0.11314	0.13407	0.79581	4	0.0006724	0.0007007	0.000706	0.992
3.5154	0.01239	−1.5	0.06112	0.02051	0.23341	4	0.000619	0.0005961	0.0005738	1.04
2.9107	0.0185	−1.1024	0.04032	0.00484	0.13524	4	0.0009555	0.0008638	0.0007613	1.13
2.9123	0.01892	−1.0441	0.04066	0.00402	0.12991	4	0.000963	0.0008672	0.0008245	1.05
2.9064	0.01445	−1.5769	0.08957	0.03462	0.32234	4	0.0011527	0.0011292	0.001062	1.06
2.3362	0.01172	−1.9951	0.07429	0.0555	0.41406	4	0.0013139	0.0013144	0.00111	1.18
2.2847	0.01263	−1.9205	0.07597	0.05092	0.39464	4	0.0014445	0.0014372	0.001304	1.10

6、与实验的比较

表六给出七个模型装置[6]的实验结果与本文计算的结果，绝大部分实验结果均比所有计算值低。

参考文献

〔1〕Wilhelm Flügge, Stress in Shells, 1960

〔2〕Bodner S. R., General instability of a ring - stiffened, circular cylindrical shell under hydsostatic pressure, J. A. M., vol, 24, 1957.

〔3〕Baruch & Singer, Effect of eccentricity of stiffeners on the general instability of stiffened cylindrical shells under hydrostatic pressure, J. M. E. S., vol. 5, №1, 1963.

〔4〕J. Singer, M.Baruch, O. Harari, Inversion of the eccentricity effect in stiffened cylindrical shells buckling under external pressure, J. M. E. S., vol. 8, №.4, 1966.

〔5〕Meck, A Survey of methods of stability analysis of ring - stiffened cylinders under hydrostatic pressure, Transactions of the ASME Series B, J. E. I., 87, 385, 1965.

〔6〕潜艇园柱耐压壳模型稳定性试验技术研究课题总结，1965年12月，七院二所。