

考虑筋条扭转刚度环向离 散加筋园柱曲板侧压稳定性

力学所十二室板壳组

一、前言

目前一些关于离散加筋园柱曲板的稳定性计算(文献〔1〕〔2〕〔3〕)均忽略了筋条抗扭刚度。这样可以利用矩阵零元素多的特征将矩阵分解成数个矩阵,减少矩阵阶数,提高计算速度和计算精度。但是,筋条抗扭刚度对离散加筋园柱曲板总体稳定性到底影响多大,特别是当筋条的横截面是闭口薄壁剖面时(这种情况下其扭转刚度与抗弯刚度是同量级的)是否还可以忽略其扭转刚度?此外当筋条较强,局部屈曲临界载荷小于总体屈曲临界载荷时,计算曲线与实验不符,这是否由于忽略了筋条扭转刚度造成的呢?这些问题需要回答。

本文用能量法导出了环向离散加筋园柱曲板的侧压屈曲平衡方程,用迭代法和Jacobi方法两种程序在109—乙机上进行了计算。将计算结果与文献〔3〕的计算结果进行了对比。

计算结果表明,考虑筋条扭转刚度与忽略筋条扭转刚度的计算曲线相似。

二、符号及其含义

- l 曲板长度 (毫米)
- b 曲板宽度(弧长) (毫米)
- h 蒙皮厚度 (毫米)
- d₁, d₂ 分别为纵筋,环筋间距 (毫米)
- R 曲板半径 (毫米)
- E, E₁, E₂ 蒙皮、纵筋、环筋的弹性横量 (公斤/毫米²)
- G, G₁, G₂ " " " 剪切横量 (公斤/毫米²)
- ν 波松比
- A₁, A₂ 纵筋,环筋截面面积 (毫米²)
- I₁, I₂ " " 截面对蒙皮中面惯性矩 (毫米⁴)

- J₁, J₂ " " " 扭转惯性矩 (毫米⁴)
- e₁, e₂ " " 截面重心到蒙皮中面之距 (毫米)

x, y, z 原点在蒙皮中面上的正交曲线坐标。

u, v, w 蒙皮中面上点在x, y, z三个方向上屈曲位移。

$$D \text{ 蒙皮弯曲刚度} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$B \text{ 拉伸刚度} \quad B = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}$$

N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy} 屈曲时产生的附加内力和弯矩。

ε_x ε_y γ_{xy} 为中面应变

N₁ 蒙皮弯曲应变能

N₂ 蒙皮中面应变能

N₃, N₄ 纵筋,环筋应变能

W 外力势

U 总势能

$$\eta_1 = \frac{E_1 I_1}{D d_1} \quad \eta_2 = \frac{E_2 I_2}{D d_2} \quad \text{纵筋,环筋弯曲刚度参数}$$

度参数

$$\eta_{t1} = \frac{G_1 J_1}{D d_1} \quad \eta_{t2} = \frac{G_2 J_2}{D d_2} \quad \text{纵筋,环筋扭转刚度参数}$$

度参数

$$\mu_1 = \frac{E_1 A_1}{B d_1} \quad \mu_2 = \frac{E_2 A_2}{B d_2} \quad \text{纵筋,环筋拉伸刚度参数}$$

度参数

$$\chi_1 = \frac{E_1 A_1 e_1}{\sqrt{DB} d_1} \quad \chi_2 = \frac{E_2 A_2 e_2}{\sqrt{BD} d_2} \quad \text{纵筋,环筋偏心参数}$$

参数

$$K_2 = \frac{1}{R} \frac{b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{B}{D}} \quad \text{曲率参数}$$

$$\beta = \frac{d}{1} \quad \text{边长比}$$

$$K_P = \frac{P_k P R}{D} \frac{b^2}{\pi^2} \quad \text{临界载荷参数}$$

N_0 为纵筋数, K_0 为环筋数

三、基本假设

本文采用以下假设:

- 1、计算限于线性弹性范围
- 2、屈曲变形限于小挠度范围
- 3、采用Donnell扁壳方程
- 4、假设蒙皮和筋条的横向剪切刚度为无穷大

1、蒙皮的弯曲应变能:

$$N_1 = \frac{D}{2} \int_0^1 \int_0^b \left\{ \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (1)$$

2、蒙皮的中面应变能:

$$N_2 = \frac{D}{2} \int_0^1 \int_0^b \left\{ (\epsilon_x + \epsilon_y)^2 - 2(1-\nu) \left[\epsilon_x \epsilon_y - \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (2)$$

其中 $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$,

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{为中面应变表达式。}$$

将中面应变表达式代入(2)。

$$N_2 = \frac{B}{2} \int_0^1 \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{w}{R} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (2')$$

3、纵向筋条的应变能:

第 N 根筋条的坐标位置为 $y = \frac{Nb}{N_0 + 1}$, 则第 N 根筋的应变能表达式为

$$N_3^N = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_{A_1} E_1 \epsilon_{x,1}^2 dA + G_1 J_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \Big|_{y = \frac{Nb}{N_0 + 1}} dx \quad (3)$$

用刚法线假定。

5、认为筋条均为布等截面,且纵向筋条布置得足够密,可以将它们的承载能力在各个间距内进行“平均”与蒙皮一起构成均质各向异性曲板。但是环筋必须考虑其离散性。

6、筋条被视为梁元素,认为筋条弯曲变形与蒙皮弯曲变形一致,考虑筋条剖面重心与蒙皮中面不重合引起的偏心影响。筋条的扭转变形则认为对自身剖面重心的自由扭转,并假定扭心与蒙皮中面重合,筋条的扭转曲率与该处蒙皮的扭转曲率一致。忽略纵向筋条与环向筋条相交处的相互作用。

7、屈曲前为无矩应力状态。

四、屈曲平衡方程

我们采用能量法导出屈曲平衡方程

(一) 能量表达式:

其中 $\varepsilon_{x,1} = \varepsilon_x - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 为筋条上坐标为 z 处的应变, 它满足假设 (4) 和 (6)。把 $\varepsilon_{x,1}$ 表达式代入 (3)

并且把 N_3^N “平均” 在蒙皮上, 然后对 y 积分, 得所有纵筋应变能和,

$$N_3 = \int_0^b \frac{b N_3^N}{d_1} dy = \frac{E_1 A_1}{2 d_1} \int_0^1 \int_0^d \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2 e_1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{I_1}{A_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{G_1 I_1}{E_1 A_1} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (3')$$

4、环筋的应变能表达式:

第 K 根筋条的位置为 $X = \frac{Kl}{K_0 + 1}$ 则第 K 根筋条应变能表达式为

$$N_4^K = \frac{E_2 A_2}{2} \int_0^d \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right)^2 - 2 e_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \frac{I_2}{A_2} + \frac{G_2 J_2}{E_2 A_2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \Big|_{x = \frac{Kl}{K_0 + 1}} dy \quad (4)$$

K_0 根筋条的应变能之和

$$N_4 = \sum_{K=1}^{K_0} N_4^K = \frac{E_2 A_2}{2} \sum_{K=1}^{K_0} \int_0^d \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right)^2 - 2 e_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{I_2}{A_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{G_2 J_2}{E_2 A_2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \Big|_{x = \frac{Kl}{K_0 + 1}} dy \quad (4')$$

5、外力势

根据假定屈曲前为无矩状态, 则外力势

$$W = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^1 -N_y^0 \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = -\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^1 RP \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy \quad (5)$$

6、总势能表达式:

$$U = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + W \quad (6)$$

(二) 屈曲位移函数:

$$u = \sum_m \sum_n u_{m,n} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$v = \sum_m \sum_n v_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (7)$$

$$w = \sum_m \sum_n w_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

这组位移函数满足如下边界条件 (经典简支)

$x = 0, l$ 蒙皮和纵筋 $w = M_x = N_x = v = 0$

$y = 0, b$ 蒙皮和环筋 $w = M_y = N_y = u = 0$

其中 N_x, N_y, M_x, M_y 为屈曲时产生的附加内力和弯矩

(三) 屈曲平衡方程:

将 (7) 代入 (1) (2) (3) (4) (5) 分别可得

(1) 蒙皮弯曲应变能

$$N_1 = \frac{D}{2} \frac{\pi^4}{b^4} \frac{bl}{4} \sum_m \sum_n w_{mn}^2 (m^2 \beta^2 + n^2)^2 \quad (8)$$

(2) 蒙皮中面应变能

$$N_2 = \frac{B}{2} \frac{\pi^2}{b^2} \frac{bl}{4} \sum_m \sum_n \left\{ \frac{1-\nu}{2} \left(u_{mn} n + v_{mn} m \beta \right)^2 + u_{mn}^2 m^2 \beta^2 + \left(v_{mn} n + \frac{b}{\pi R} w_{mn} \right)^2 + 2 \nu u_{mn} m \beta \left(v_{mn} n + \frac{b}{\pi R} w_{mn} \right) \right\} \quad (9)$$

(3) 纵筋应变能

$$N_3 = \frac{D}{2} \frac{\pi^4}{b^4} \frac{bl}{4} \sum_m \sum_n \left\{ \eta_1 w_{mn}^2 m^4 \beta^4 + \mu_1 \frac{b^2}{\pi^2} \frac{B}{D} u_{mn}^2 m^2 \beta^2 - 2 \chi_1 \frac{b}{\pi} \sqrt{\frac{B}{D}} u_{mn} v_{mn} n^2 \beta^2 + \eta_{11} w_{mn}^2 m^2 n^2 \beta^2 \right\} \quad (10)$$

(4) 环向筋条应变能

$$N_4 = \frac{D}{2} \frac{\pi^4}{b^4} \frac{bl}{4} \sum_m \sum_n \sum_i \left\{ \eta_2 n^4 w_{mn} w_{in} K_s(i, m) + \mu_2 \frac{b^2}{\pi^2} \frac{B}{D} \left(v_{mn} n + \frac{w_{mn} b}{\pi R} \right) \cdot \left(v_{in} n + \frac{w_{in} b}{\pi R} \right) K_s(i, m) - 2 \chi_2 \sqrt{\frac{B}{D}} \frac{b}{\pi} w_{in} n^2 \left(v_{mn} n + \frac{w_{mn} b}{\pi R} \right) K_s(i, m) + \eta_{12} n^2 m i \beta^2 w_{mn} w_{in} K_c(i, m) \right\}$$

$$\text{其中 } K_s(i, m) = \frac{2}{K_0 + 1} \left[\sum_{K=1}^{K_0} \text{SIN} \frac{iK\pi}{K_0 + 1} \text{SIN} \frac{mK\pi}{K_0 + 1} \right]$$

$$K_c(i, m) = \frac{2}{K_0 + 1} \left[\sum_{K=1}^{K_0} \text{COS} \frac{iK\pi}{K_0 + 1} \text{COS} \frac{mK\pi}{K_0 + 1} \right]$$

5、外力势

$$W = \frac{PR}{2} \frac{\pi^2}{b^2} \frac{bl}{4} \sum_m \sum_n n^2 w_{mn}^2 \quad (12)$$

将 (8) - (12) 代入 (6) 即得总势能表达式, 根据最小势能原理, 由 $\delta U = 0$ 可得屈曲方程

$$\frac{\partial U}{\partial u_{mn}} = 0 \quad u_{mn}^0 \left[\frac{1-\nu}{2} n^2 + (1+\mu_1) m^2 \beta^2 \right] + \frac{1+\nu}{2} v_{mn}^0 m n \beta + w_{mn} \left[\nu K_2 m \beta - \right.$$

$$-\chi_1 m^3 \beta^3 \Big] = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial v_{m,n}} = 0 \quad u_{m,n}^0 \frac{1+v}{2} m n \beta + v_{m,n}^0 \left(n^2 + \frac{1-v}{2} m^2 \beta^2 \right) + w_{m,n} K_2 n + \mu_2 n^2 \sum_i v_{i,n}^0 K_S(i,m) \\ + \left(\mu_2 n K_2 - \chi_2 n^3 \right) \sum_i w_{i,n} K_S(i,m) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial U}{\partial w_{m,n}} = 0 \quad w_{m,n} \left[\left(m^2 \beta^2 + n^2 \right)^2 + K_2^2 + \eta_1 m^4 \beta^4 + \eta_2 m^2 n^2 \beta^2 \right] + u_{m,n}^0 \left[v K_2 m \beta - \chi_1 m^3 \beta^3 \right] \\ + v_{m,n}^0 n K_2 + \left[\mu_2 K_2^2 + \eta_2 n^4 - 2 \chi_2 K_2 n^2 \right] \sum_i w_{i,n} K_S(i,m) + \eta_2 n^2 \sum_i w_{i,n} m i \beta^2 \\ \cdot K_C(i,m) + \left[\mu_2 K_2 n - \chi_2 n^3 \right] \sum_i v_{i,n}^0 K_S(i,m) = K_P n^2 w_{m,n} \quad (15)$$

其中 $u_{m,n}^0 = u_{m,n} \frac{b}{\pi} \sqrt{\frac{B}{D}}$

$v_{m,n}^0 = v_{m,n} \frac{b}{\pi} \sqrt{\frac{B}{D}}$

把 (13)、(14)、(15) 化成二个方程

$$v_{m,n}^0 \left\{ 1 + \frac{1-v}{2} \left(\frac{m \beta}{n} \right)^2 - \frac{\left(\frac{1+v}{2} m \beta \right)^2}{\frac{1-v}{2} n^2 + (1+\mu_1) m^2 \beta^2} \right\} + \mu_2 \sum_i v_{i,n}^0 K_S(i,m) \\ + w_{m,n} \left\{ \frac{K_2}{n} - \frac{\frac{1+v}{2} m^2 \beta^2 \left(\frac{v K_2}{n} - \frac{\chi_1 m^2 \beta^2}{n} \right)}{\frac{1-v}{2} n^2 + (1+\mu_1) m^2 \beta^2} \right\} + \left[\mu_2 \frac{K_2}{n} - \chi_2 n \right] \sum_i w_{i,n} K_S(i,m) = 0 \quad (17)$$

$$v_{m,n}^0 \left\{ \frac{K_2}{n} - \frac{\frac{1+v}{2} m^2 \beta^2 \left(\frac{v K_2}{n} - \frac{\chi_1 m^2 \beta^2}{n} \right)}{\frac{1-v}{2} n^2 + (1+\mu_1) m^2 \beta^2} \right\} + \left[\mu_2 \frac{K_2}{n} - \chi_2 n \right] \sum_i v_{i,n}^0 K_S(i,m) \\ + w_{m,n} \left\{ (1+\eta_1) \frac{m^4 \beta^4}{n^2} + (2+\eta_2) m^2 \beta^2 + n^2 + \frac{K_2^2}{n^2} - \frac{m^2 \beta^2 \left(\frac{v K_2}{n} - \frac{\chi_1 \beta^2 m^2}{n} \right)^2}{\frac{1-v}{2} n^2 + (1+\mu_1) m^2 \beta^2} \right\} \\ + \left\{ \mu_2 \left(\frac{K_2}{n} \right)^2 + \eta_2 n^2 - 2 \chi_2 K_2 \right\} \sum_i w_{i,n} K_S(i,m) + \eta_2 \beta^2 \sum_i w_{i,n} m i K_S(i,m) = K_P w_{m,n} \quad (18)$$

(17)、(18) 就是考虑筋条扭转刚度环向离散加筋圆柱曲板侧压屈曲平衡方程。

若当环向筋条亦是足够密, 可以“平均”在蒙皮上时 (4') 变为

$$N_4 = \frac{E_2 A_2}{2 d_2} \int_0^b \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right)^2 - 2 e_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{I_2}{A_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{G_2 J_2}{E_2 A_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (19)$$

利用 (19) 代替 (4') 式, 顺着上述的步骤, 可以导出正交各向异性圆柱曲板的侧压稳定方程:

$$K_p = \frac{1}{n^2} \left\{ (1 + \eta_1) m^4 \beta^4 + (1 + \eta_2) n^4 + (\eta_{1,1} + 2 + \eta_{1,2}) m^2 n^2 \beta^2 + \frac{1}{\frac{1-\nu}{2}(1+\mu_2)n^4 + \frac{1-\nu}{2}(1+\mu_1)m^4 \beta^4 + \left[(1+\mu_1)(1+\mu_2) - \nu \right] m^2 n^2 \beta^2} \cdot \left\{ -\frac{1-\nu^2}{2} \chi_1^2 m^8 \beta^8 \right. \right. \\ - \frac{1-\nu}{2} \chi_2^2 n^8 - (1+\mu_2) \chi_1^2 m^6 \beta^6 n^2 - (1+\mu_1) \chi_2^2 n^6 m^2 \beta^2 + (1+\nu) \chi_1 \chi_2 m^4 n^4 \beta^4 \\ \left. \left. - (1-\nu) \left[(1+\mu_1) \chi_2 + (1+\mu_2) \chi_1 \right] K_2 m^4 \beta^4 n^2 + \nu(1-\nu) \chi_1 K_2 m^6 \beta^6 + \nu(1-\nu) \chi_2 K_2 n^2 \beta^2 n^4 \right. \right. \\ \left. \left. + K_2^2 m^4 \beta^4 \cdot \frac{1-\nu}{2} \left[(1+\mu_1)(1+\mu_2) - \nu^2 \right] \right\} \right\} \quad (20)$$

由 (17)、(18) 二式, 令筋条参数等于零

即 $\mu_1 = \mu_2 = \chi_1 = \chi_2 = \eta_1 = \eta_2 = \eta_{1,1} = \eta_{1,2} = 0$

经过运算整理可得, 光曲板侧压屈曲临界荷载公式

$$K_p = \frac{1}{n^2} \left[\left(m^2 \beta^2 + n^2 \right)^2 + \frac{(1-\nu^2) K_2^2 m^4 \beta^4}{(m^2 \beta^2 + n^2)^2} \right] \quad (21)$$

(21) 可以用来计算筋间蒙皮局部屈曲临界荷载。计算时取 1 为筋间蒙皮的长度。

(17)、(18) 二式对环向波数 n 是可分离的, 对于既定 n 值, 写成向量形式:

$$\left. \begin{aligned} C_1 \bar{V} + A_1 \bar{W} &= 0 \\ C_2 \bar{V} + A_2 \bar{W} &= K_p \bar{W} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

其中: A_1, A_2, C_1, C_2 为 $m \times m$ 阶方阵, $A_1 = C_2$, $\bar{V} = \begin{Bmatrix} v^0 \\ 1n \\ v^0 \\ 2n \\ \vdots \\ v^0 \\ mn \end{Bmatrix}$ $\bar{W} = \begin{Bmatrix} W_{1n} \\ W_{2n} \\ \vdots \\ W_{mn} \end{Bmatrix}$

由 (22) 式, 经过简单的矩阵运算得: $Q \bar{W} = K_p \bar{W}$ (23)

其中 Q 是 $[m \times m]$ 阶对称实正定矩阵, $Q = (A_2 - C_2 C_1^{-1} A_1)$ 。

将 Q 求逆, (23) 式变为:

$$\frac{1}{K_p} \bar{W} = Q^{-1} \bar{W} \quad (24)$$

令 $K_c(i, m) = 0$ (17) (18) 以及 (20) (23) (24) 化为忽略筋条抗扭刚度的环向加筋圆柱曲板侧压屈曲方程, 这时 Q 矩阵有很多零元素, 可以化为子矩阵进行计算, 请看文 [8]。

(20), (21) 与 (24) 分别是求解正交各向异性曲板, 筋间蒙皮局部屈曲和环向离散加筋曲板临界载荷的计算公式。

五、计算结果及其分析

方程 (23)、(24) 中的 Q 是 $[m \times m]$ 阶矩阵。计算时我们取 Q 为 $[20 \times 20]$ 阶矩阵, 即位移函数取

20项。在109-乙机上用迭代法与Jacobi方法进行了求解。同时, 还计算了各向异性曲板和筋间蒙皮局部屈曲临界载荷。

根据计算结果, 有以下几点结论:

1. 在表 (1) 中列出了用迭代法与Jacobi方法计算的结果。不难看出两种方法的计算结果非常接近, 说明计算结果可靠。

迭代法与JACOBI法计算值比较

表 1

η_{02}	环向波数 计算方法	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	各向异性
		K_p								
7.034	迭代	2221.84	82.53	69.19°	77.97	58.74	51.66 [△]	60.57	72.72	78.46
	Jacobi	2221.52	82.26	68.94°	77.15	52.50	50.31 [△]	58.16	70.85	
7.034 × 5	迭代	2250.40	192.30°	200.01	85.32	53.09	51.72 [△]	60.77	72.82	196.9
	Jacobi	2250.13	192.04°	199.79	89.57	53.57	50.47 [△]	58.21	70.87	
7.034 × 5 ³	迭代	3022.88	1046.38	330.88	85.35	53.12	51.73 [△]	60.81	72.84	
	Jacobi	3024.24	1045.42	285.81	92.37	53.78	50.50 [△]	58.22	70.88	
7.034 × 5 ⁶	迭代	8924.24	1321.50	338.61	85.32	53.10	51.76 [△]	60.92	73.16	
	Jacobi	8942.45	1321.0							

局部屈曲 $K_p = 48.4$, Δ 表示两个极值点

计算参数: $\beta = 0.547$ $K_2 = 214.17$ $\mu_1 = 0$ $\mu_2 = 0.0547$ $\chi_1 = 0$ $\chi_2 = 0.505$
 $\eta_{1,1} = 0$ $\eta_{1,2} = 4.2$ $K_0 = 2$

2. 为了比较考虑筋条扭转刚度的计算结果。我们将文献[3]中的两组参数值, 增加考虑筋条扭转刚度和忽略筋条扭转刚度, 进行了计算, 计算结果列入表[2][3], 将曲线绘于图[1][2]。由曲线看出考虑筋条扭转刚度和忽略筋条扭转刚度的计算曲线走向极为相似。都是当筋条刚度较小, 筋间蒙皮局部屈曲临界载荷大于总体屈曲临界载荷, 筋条可与蒙皮一起屈曲, 各向异性曲板的计算模型与离散加筋计算模型计算结果相近, 前者略大于后者。但筋条刚度增大到一定值时, 筋条就不再与蒙皮同时屈曲, 而是蒙皮局部屈曲先发生, 筋条后屈曲。这时各向异性曲板模型将给出过高的结果。这是因为蒙皮先局部屈曲后, 蒙皮上的应力分布不再是均匀的, 各向异性曲板模型反映不了这个事实, 因而计算结果不合理。考虑加筋离散性的计算值怎么样呢? 它却趋向比蒙皮局部屈曲临界载荷稍大些的渐近线, 而无论筋条刚度多么大, 考虑加筋离散性的临界载荷计算值再高不去了。这显然也是不合理

的。因为当蒙皮先失稳后, 结构就不再是无矩状态, 这与基本假设是相违背的。因而得出不合理的结果。

3. 当筋间蒙皮局部屈曲载荷大于总体屈曲载荷时, 分析公式 (20) 可以定量地估计筋条扭转刚度对于总体屈曲载荷的影响。方程 (20) 通常在 $m=1$ 时 K_p 取最小值。我们令 $m=1$, 并且将大括弧外边的

$\frac{1}{n^2}$ 乘到大括弧之内, 比较包含筋条弯曲刚度和扭转刚度的二项 $\eta_2 n^2$ 和 $\eta_{1,2} \beta^2$ 容易看出在 $\beta=1$, $n=1$ 时弯曲刚度与扭转刚度对总体屈曲载荷的影响是同量级的。而 n 越大, 弯曲刚度影响越大, β 越大扭转刚度影响越大。

4. 由于联立方程 (17) 与 (18) 对于 n 是可以分离的, 在计算中令 n 分别等于 1 到 10 的自然数, 从 (24) 式中求出 10 个特征值 K_p 。将部分计算结果列入表[1], 从表[1]得知, 对于某些参数值, 从 $n=1$ 到 $n=10$, K_p 有两个极值点, 一个稍小于各向异性公

式求的总体屈曲临界载荷参数，一个略大于蒙皮局部屈曲临界载荷参数。这与忽略筋条扭转刚度的计算结

果不同。表(2)(3)与图(1)(2)中的 K_P 值，是取两个极值中的较小的一个。

考虑筋条扭转刚度和忽略筋条扭转刚度临界载荷系数的比较之一

表 2

	η_2	2	5	10	20	50	100	200	250	1000	1250
考虑筋条	$\eta_{1,2}$	2.1	5.25	10.5	21	52.5	105	210	262.5	1050	1312.5
扭转刚度	K_P 离散	29.91	69.41	88.16	89.85	90.1	90.4	90.44	90.31	90.48	90.35
	K_P 各向异性	46.24	80.55	130.68	231.3	461.89	728.5	1233.5	1471.9	5273	6521.9
忽略筋条	η_2	2	5	10	20	50	100	200		1000	
扭转刚度	K_P 离散	30.58	68.53	82.87	83.2	83.37	83.42	83.45		83.47	
	K_P 各向异性	44.44	75.33	120.3	210.3	405.1	605.1	1005		4205	

计算参数: $\beta = 1$ $K_2 = 150$ $\mu_1 = 0$ $\mu_2 = 0.5$ $\chi_1 = 0$ $\chi_2 = 1.1$ $\eta_1 = 0$
 $\eta_{1,1} = 0$ $K_0 = 2$
 局部屈曲 $K_P = 78.38$

考虑筋条扭转刚度与忽略筋条扭转刚度的临界载荷系数比较之二

表 3

	η_2	2	5	10	20	50	100	200	250	1000	1250
考虑筋条	$\eta_{1,2}$	2.1	5.25	10.5	21	52.5	105	210	262.5	1050	1312.5
扭转刚度	K_P 离散	22.8	56.3	69.43	70.52	70.69	71.0	71.09	70.90	71.15	70.94
	K_P 各向异性	31.2	61.5	104.62	125.1	306.5	565.5	1070.5		3672	
忽略筋条	η_2	2	5	10	20	50	100	200		1000	
扭转刚度	K_P 离散	22.78	50.48	64.29	65.13	65.57	65.66	65.69		65.71	
	K_P 各向异性	29.28	56.28	94.12	134.1	254.1	454.1	851.1		2279	

计算参数: $\beta = 1$, $K_2 = 75$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0.5$, $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 1.1$, $\eta_1 = 0$,
 $\eta_{1,1} = 0$, $K_0 = 2$,
 局部屈曲 $K_P = 60.18$

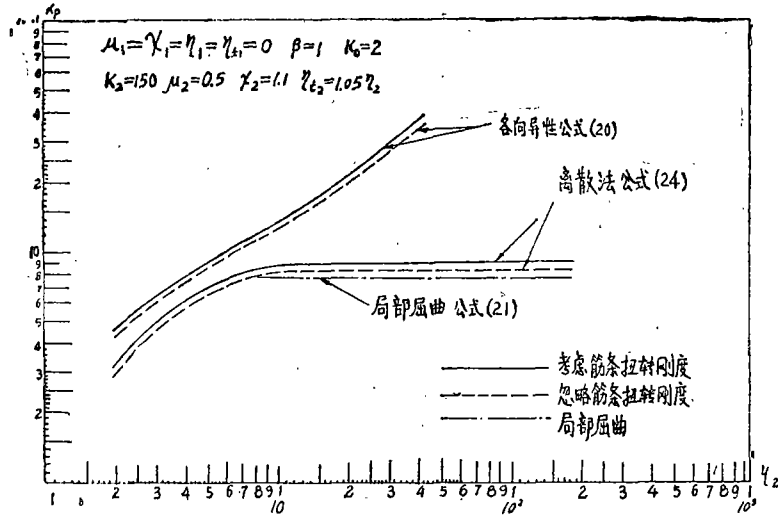


图 1

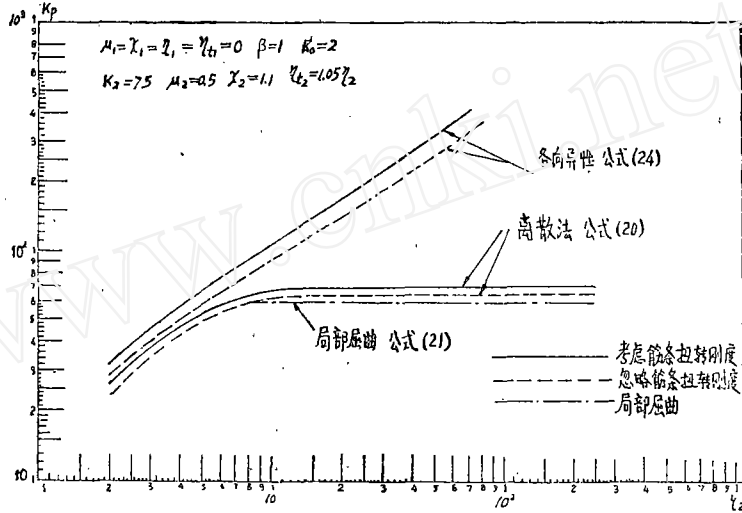


图 2

参 考 文 献

- [1] Block, D.L. Influence of Ring Stiffeners on Instability of Orthotropic Cylinders in Axial Compression, NASA. TN. D-2482, 1964.
- [2] 纵向离散加筋曲板的轴压稳定性 (研究报告), 中国科学院力学所, 1972.
- [3] 环向离散加筋圆柱曲板的侧压稳定性, 本集, 1972.
- [4] Baruch, M; Singer, J, Effect of Eccentricity of Stiffeners on the general Instability of stiffened Cylindrical Shells under Hydrostatic Pressure, Jour. mech. Engin. Sci., Vol5, 1963 No1, pp-23-27.
- [5] Singer, J, Baruch M, Harari, O: Inversion of the Eccentricity Effect in Stiffened Cylindrical Shells Buckling under External Pressure, Jour. mech. Engin. Sci., Vol8, No 4, 1966, pp. 363-373.
- [6] Singer, J; Meer, A and Baruch, M, Buckling of Cylindrical Panels under Lateral Pressure, Aeronautical Journal, Vol.73, No.98, 1969, pp.169-172.