

运动叶栅通过静止叶栅 尾流区的总压变化计算

力学所 五室 张保栋

1976年2月

内 容 摘 要

压气机转子通过静子的尾流区时,往往偏离在理想的位势流下设计出的工况,例叶片上的举力是不稳定的,从而引起气流总压的变化。本文提出了一个简单的方法,以致使设计工作者能去计算这种变化,调整设计参数。本文的结果与已有的结果作了比较,是令人满意的。

目 录

主要符号对照表

前 言

- (一) 基本方程的推导
- (二) 基本方程在运动座标系统中的表现形式
- (三) 举力的一般表达式
- (四) 在小剪切流情况下的应用
- (五) 与Henderson的结果比较
- (六) 结论

参考资料

主要符号对照表

$$a = -m s \cos\beta \operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$$

\vec{A} 奇点速度

\vec{F} 流体作用在举力线上的力

$$i = \sqrt{-1}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 在 x, y, z 方向上的单位向量

\vec{i}', \vec{j}' 在 X, Y 方向上的单位向量

$h = \frac{\mu U \cos \alpha}{\omega_0}$, 诱导频率

L 举力

M 正整数

m 整数

P 静压力

P_0 总压

\bar{R} 复数的实数部分

s 叶片的间距弦长比

T 时间周期

t 时间座标

U 运动叶栅或奇点系统的移动速度

\vec{V} 在绝对座标中的速度矢

V_0 绝对上游速度

\vec{w} 在相对座标中的速度矢

w_0 相对上游速度

X, Y 在相对系统中的笛卡儿座标

x, x', y, y' 在绝对系统中的笛卡儿座标

$\alpha = \gamma + \beta$, 角

β 相对空气进入角

β 安装角

γ V_0 和 w_0 间的夹角

Γ 环量

δ Dirac函数

η', ζ' 在绝对系统中的笛卡儿座标

η, ζ 在相对系统中的笛卡儿座标

θ w_0 和 w_{0n} 之间的夹角

ρ 密度

Φ 位势函数

$\vec{\Omega}$ 旋度矢量

$\vec{\Lambda}$ 角速度

$\vec{\gamma}$ 旋涡强度矢

字母的脚标和上标

m 平均值

$-\infty$ 远上游

' 小扰动

" 尾流

前 言

在过去的二十多年来, 涡轮机械中的不稳定流动逐步地受到重视了, 其重视的理由并不仅仅是为了研究减少噪音, 同样还是为了进一步改善涡轮机械的性能。现有的比较成功的设计理论基本上都是建筑在稳定流动的假设上。但事实上, 涡轮机械中的过程是不稳定的, 例如转子在上游静子所形成的尾流区中的运动, 相邻叶片的存在破坏了位势流的存在, 叶片的振动引起攻角的改变, 等等, 这些都会导致流动的不稳定, 这样的不稳定过程最终将改变叶片上的举力的大小和方向, 最终导致总压的变化。所以, 显然, 怎样去预言这种影响, 怎样去减少和补偿这种影响所引起的损失将是理论工作者的一个严重任务, 然而要完成这样一个任务的道路并不是光滑平坦的。我们可以想象, 即使在高速电子计算机相当发展的现在, 人们要对一个稳定流动过程作出相当程度精操的分析, 还是有不少困难, 还是要花费大量的时间和劳动, 何况还要加入不稳定的考虑。在目前, 在处理不稳定流动问题上的最大困难恐怕首先还不是在计算方面, 更困难的恐怕是不稳定流的物理过程还是不十分清楚, 从而妨碍了人们去建立适当的计算手段。尽管这样, 到目前为止, 人们还是做了不少工作去接近它。肯普 (Kemp) 和西尔斯 (Sears) [参阅资料 1, 2, 3*] 曾经把薄翼理论 [4] 引入涡轮机械中去研究不稳定流动问题。据作者所知, 这是最早的工作。之后, 相继有普雷斯顿 (Preston) [5]。哈洛克 (Horlock) [6, 7], 霍索恩 (Hawthorne) [8], 亨德森 (Henderson) [9] 等作者曾在这个领域上做过工作。所有这些工作有一些共同之点, 这就是假设流动是二维平面位势流, 假设扰动是小的, 或说, 气流的转折是小的。在这些工作中, 作者想提一下如下的三个工作, 这是因为他们的工作与本文有关, 亨德森 (Henderson) 曾经做了实验, 来证明了他的理论计算结果, 两者的比较是令人满意的, 但是他的计算比较复杂和冗长, 这限制了进一步地把他的工作推广到更为接近实际的问题中去, 例如有限弦展或三维流动的问题。第二个工作是冯·卡门 (Vonkarman) 和西尔斯 (Sears) 的工作。他们处理了单翼在非一致流场中运动的问题, 这是一个理论分析工作, 基于旋涡理论的概念, 他们赋予问题以清晰的物理意义, 消除了一些不必要的数学复杂性。第三个工作是霍索恩 (Hawthorne) 的工作, 他像通常人们做的那样把每一个经受举力的叶片看作为一个孤立的旋涡, 然后在解问题时在数学上用不连续的函数把问题的物理意义显示出来, 使之更接近于实际的物理现象, 位势场是不连续的! 从而使得有

* 以下行文将省略“参考资料”4字

可能去描述尾流所起的作用，特别是使得有可能去接近涡轮机械中叶尖和叶根处的边界层问题，众所周知，在这样的区域中，举力的畸变特别厉害。文章〈8〉和〈10〉同时还揭露了这样一个事实：这类的不稳定流动问题的理论分析正确与否，在不能被直接证明的情况下，可以用简接的办法——测量时间平均总压的变化来证明。

本文的目的就是在于去探索一个比较简便的估计时间平均总压的变化的方法，其方法适用的条件是：转速是常数的转子通过一个小剪切流场。最后的结果与亨德森(Henderson)的结果作了比较，结果是令人满意的。

(一) 基本方程的推导

在推导基本方程之前，我们先做一些基本假设，这些假设将适用于全文。

- a) 流动是无粘性的，不可压缩的，且限于二维；
- b) 运动叶栅的上游流动是一个小剪切流场，平行于一个方向。在本文中，平行于x方向。在这里小剪切流是指流场中的扰动速度比之流场的平均速度，其数量级很小，所以扰动速度的平方项可以忽略，表示成数学形式，即为

$$V_0 = V_{0m} + \Delta V' \quad (y) \sim O(1) + O(\epsilon)$$

在上式中， ϵ 表示微小量；

- c) 由叶片引起的扰动同样是很小，即具有 ϵ 数量级，对于大多数轻负载的叶片，流动的行为是这样的；

d) 叶片上任何部分处的垂直分量同样是微小的，所以叶片和离开叶片的涡迹上的任意一点都可以认为是落在弦长方向上，从叶片上脱落下来的旋涡将在弦长方向上运动，其迁移速度可以被视作等于流体质点进入和离开叶片的速度平均值；

- e) 叶片的两个表面没有边界层的分离现象；

- f) 作为假设(a)的结果，可假设平均展弦比很大；

g) 从假设(c)和(d)可以导出脱落旋涡的强度是具有 ϵ 量级，叶片上举力的畸变也是 ϵ 量级。

假设c)，d)和f)构成了举力理论的基础。基于这些假设，叶栅的每一个叶片就被看作是一根举力线，这根线被放在一个小剪切流流场中(图1)。

于是，欧拉(Euler)动量方程可以被写成

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{1}{\rho} \vec{F} \quad (1-1)$$

在上式中， \vec{V} 是绝对速度；P—静压， ρ —流体密度；t—时间； $-\vec{F}$ —单位容积体积力，在本文中， \vec{F} 代表由叶片或叫做奇点引起的体积力。

方程(1-1)可以被写成另外一种形式

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \times \vec{\Omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla P_0 - \frac{1}{\rho} \vec{F} \quad (1-2)$$

在这里, $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V}$ 是绝对旋涡矢量; $P_0 = P + \frac{1}{2} \rho V^2$ —— 滞止压力或总压。

在没有源和潭的情况下, 连续方程的形式是

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1-3)$$

现在假设, 除了奇点处 (在本题中, 指举力线的位置), 速度势到处存在。速度 \vec{V} 是在 x 方向上的基本速度 $\vec{V}_0(y)$ 和数量级为 ϵ 的扰动速度之和。根据假设 (b), 一切二阶以上的小量 $o(\epsilon^2)$ 都可以被忽略 (注: 在以后各节中, 对此不再做特别的声明), 所以可以线性化上列方程。

首先, 考虑没有奇点的流动。根据上述假设, 速度可以被写成

$$\vec{V} = \vec{i} V_0(y) + \nabla \Phi \sim o(1) + o(\epsilon) \quad (1-4)$$

这里, \vec{i} 是 x 方向上的单位矢, Φ 是相对于基本流动而言的小扰动速度势。

利用 (1-3) 式, (1-4) 式变成

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1-5)$$

同样, 我们有

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V} = -\vec{k} \frac{\partial V_0}{\partial y} = -\vec{k} \frac{\partial(\Delta V')}{\partial y} \sim o(\epsilon) \quad (1-6)$$

$$\vec{V}^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = V_0^2 + 2V_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + o(\epsilon^2) \quad (1-7)$$

$$\vec{V} \times \vec{\Omega} = \nabla \cdot \frac{1}{2} V_0^2 + o(\epsilon^2) \quad (1-8)$$

把 (1-7) 式和 (1-8) 式代入 (1-2) 式, 当 $\vec{F} = 0$ 时, 我们得到

$$\nabla \left[\frac{P}{\rho} + \left(V_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi \right] = 0 \quad (1-9)$$

假设, 扰动在远上游处并不存在, 即 $\Phi_{-\infty} = 0$, 沿流线积分 (1-9), 就得到

$$\frac{P}{\rho} + \left(V_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi = \frac{1}{\rho} P_{-\infty} \quad (1-10)$$

在这里 $P_{-\infty}$ = 常数, 视作一参考压力, 式 (1-10) 也可以写成另一形式

$$\frac{P - P_{-\infty}}{\rho} = - \left(V_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi \quad (1-11)$$

运用连续方程和算子 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, 又可以写成

$$\nabla^2 \frac{P}{\rho} = - \left(V_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 \Phi = 0 \quad (1-12)$$

同样, 利用总压的定义后, 我们有

$$\frac{P_0 - P_{0-\infty}}{\rho} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1-13)$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \frac{P_0}{\rho} &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V^2}{\partial y^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V^2}{\partial y^2}\end{aligned}\quad (1-14)$$

这里的总压的表达式为 $P_0/\rho = P/\rho + \frac{1}{2} V_0^2 + V_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ (1-15)

现在, 考虑流场中存在奇点, 即用举力线代表的叶片。此时, 流场中的速度场出现不连续现象。为此, 我们在式(1-4)中附加一个不连续项。

$$\vec{V} = \vec{i} V_0(y) + \nabla \Phi + \vec{A} \quad (1-16)$$

这里, 矢量 \vec{A} 代表了数量级为 $O(\epsilon)$ 的举力线奇点的作用, 在动量方程中, 这个作用将用 \vec{F} 来代表。因为假设了流场中没有源和潭, 所以连续方程可以被写成

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{V} &= \nabla \cdot \vec{i} V_0(y) + \nabla^2 \Phi + \nabla \cdot \vec{A} = 0 \\ \text{或 } \nabla \cdot \vec{A} &= -\nabla^2 \Phi\end{aligned}\quad (1-17)$$

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V} = -\vec{k} \frac{dV_0}{dy} + \nabla \times \vec{A} \quad (1-18)$$

和 $\vec{V}^2 = V_0^2(y) + 2V_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2\vec{i} V_0 \cdot \vec{A} + O(\epsilon^2)$ (1-19)

将式(1-16)代入方程(1-1), 有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) (\nabla \Phi + \vec{A}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{1}{\rho} \vec{F} \quad (1-20)$$

将式(1-18)和式(1-19)代入到方程(1-2), 并应用矢量恒等式

$$\begin{aligned}\nabla \vec{i} V_0 \cdot \vec{A} &\equiv (\vec{i} V_0 \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{i} V_0 + \vec{i} V_0 \times (\nabla \times \vec{A}) + \\ &\quad + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{i} V_0)\end{aligned}$$

和 $\nabla \vec{i} V_0 \cdot \nabla \Phi \equiv (\vec{i} V_0 \cdot \nabla) \nabla \Phi + (\nabla \Phi \cdot \nabla) \vec{i} V_0 + \vec{i} V_0 \times (\nabla \times \nabla \Phi) + \nabla \Phi \times (\nabla \times \vec{i} V_0)$

我们就得到

$$\nabla \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi + \frac{1}{\rho} P \right] + \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \vec{A} = -\frac{1}{\rho} \vec{F} \quad (1-21)$$

如果考虑到式(1-9)仅代表了没有奇点的流动和 \vec{A} 代表了奇点 \vec{F} 的影响, 从方程(1-20)和(1-21), 我们可以导出

$$\left(V_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{A} = -\frac{1}{\rho} \vec{F} \quad (1-22)$$

$$\begin{aligned}
 -\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \Phi &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla \cdot \vec{A} = \nabla^2 \frac{1}{\rho} P \\
 &= -\nabla \cdot \frac{1}{\rho} \vec{F} \quad (1-23)
 \end{aligned}$$

式(1-23)是在式(1-22)的基础上对等式两边取散度,然后应用连续方程后得到的。

现在,总压被表达为

$$P_0/\rho = P/\rho + \frac{1}{2} V_0^2 + V_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i V_0 \cdot \vec{A} \quad (1-24)$$

由此,得到

$$\frac{(P_0 - P_{0-\infty})}{\rho} = i V_0 \cdot \vec{A} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1-25)$$

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 (P_0/\rho - i V_0 \cdot \vec{A}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_0^2}{\partial y^2} \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_0^2}{\partial y^2} \quad (1-26)
 \end{aligned}$$

有趣的是,以上结果,除了式(1-26)外,在形式上完全和在均匀流场中得到的结果〔8〕相同。在式(1-26)中,比之〔8〕中的类似结果,多出了 $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_0^2}{\partial y^2}$ 这一项。

(二) 基本方程在运动座标系统中的表现形式

运动通常可以被分为平移和转动二类。在一般的运动形式中,这两类运动往往是结合在一起的。众所周知,相对于运动参考系统的流体微团的加速度是不同于在绝对静止参考系统中的流体微团的加速度的,所以,静止系统中的运动方程必须被修正后才能适用于运动系统。

如果假设,在某一瞬时,运动参考系统以角速度 $\vec{\Lambda}$ 绕着0点旋转,而点0又相对于绝对静止系统以加速度 \vec{F}_0 平移。从一般的力学书本上知道,微团的绝对加速度可以被表达为

$$\frac{D \vec{w}}{Dt} + \vec{F}_0 + 2\vec{\Lambda} \times \vec{w} + \frac{d\vec{\Lambda}}{dt} \times \vec{r}_i + \vec{\Lambda} \times (\vec{\Lambda} \times \vec{r}_i) \quad (2-1)$$

在(2-1)式中, \vec{w} 是运动参考系统中流体微团的速度矢, \vec{r}_i 是流体微团相对于点0的位置矢。式(2-1)必须等于在静止系统中所有外力之和。如果我们略去重力和粘性力,就可写成如下形式

$$\frac{D\vec{w}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \left[\vec{F}_0 + 2\vec{\Lambda} \times \vec{w} + \frac{d\vec{\Lambda}}{dt} \times \vec{r}_i + \vec{\Lambda} \times (\vec{\Lambda} \times \vec{r}_i) \right] \quad (2-2)$$

比较式(2-2)和(1-1),我们定义一个力场 \vec{F}_1

$$\vec{F}_1 = \rho \left[\vec{F}_0 + 2\vec{\Lambda} \times \vec{w} + \frac{d\vec{\Lambda}}{dt} \times \vec{r}_i + \vec{\Lambda} \times (\vec{\Lambda} \times \vec{r}_i) \right] \quad (2-3)$$

于是,方程(2-2)可以被写成

$$\frac{D\vec{w}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \frac{1}{\rho}\vec{F}_1 \quad (2-4)$$

方程式(1-1)和(2-4)的形式相同,这暗示着有可能导出一组类似于上节中导出的方程。要做到这一点,问题在于如何让 \vec{F}_1 只代表举力线奇点的影响。

让我们来选取这样的座标系统,它的原点 O 是放在叶片上,即举力线奇点上,它的横轴躺在 \vec{w} 方向上,用符号 X 表示,另一轴 Y 垂直于 X 轴,根据小扰动的假设,可以认为弦轴和 \vec{w} 方向一致,因为绝对流场是剪切流场,从简单的速度三角形可知, \vec{w} 是随时间变化的,从而推知,系统 (X, Y) 是随时间而摇摆的。但点 O 的运动,即叶片的转速是被假设为常数,且无源无潭,所以连续方程还是能成立的,如果略去由这样的座标变换所引起的二阶以上的小量,连续方程可以被写成

$$\nabla \cdot \vec{w} = \frac{\partial}{\partial X} w = 0 \quad (2-5)$$

显然,对于一个在运动系统中的观察者来说, \vec{w} 是不变化的。

基于座标的选择,使 $\vec{r}_i = 0$, \vec{F}_1 便成为

$$\rho^{-1}\vec{F}_1 = \vec{F}_0 + 2\vec{\Lambda} \times \vec{w} \quad (2-6)$$

至此, $\vec{r}_i = 0$ 的条件限制了我们考虑问题的范围,即我们并不考虑流场中每一点的流体微团,而是只考虑奇点位置上的一个假想的流体微团的作用。从这一叶片到相邻的一个叶片,这种作用将有一个位相差。现在,我们再引入一个在薄翼理论中常用的准稳定概念。所谓准稳定是这样来定义的:运动中某一瞬时值被假定能存在很长的时间而不变化。由于这一概念的引入,一个不稳定流动问题可以被转化为一个稳定问题来处理,其结果的精确与否视最后如何被修正。这个概念使得有可能把 \vec{F}_0 视作举力的代表,根据冯·卡门(Von Karman)的建议[13],它可被写成。

$$\vec{F}_0 = \vec{\gamma} \times \vec{w} \quad (2-7)$$

在这里, $\vec{\gamma}$ ——旋涡强度,同速度 \vec{w} 一样,它可以随时间而变化。

又借用小扰动理论中的近似方法,我们将任一瞬时量分作为二个量,一个是平均值,具有 $O(1)$ 的数量级,一个是扰动值,具有 $O(\epsilon)$ 的数量级,这就是说 $\vec{\gamma}$ 和 \vec{w} 可以分别被写成

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_{0m} + d\vec{\gamma} \sim 0 \quad (1) + 0 \quad (\varepsilon) \quad (2-8)$$

$$\vec{w} = \vec{w}_{0m} + d\vec{w} \sim 0 \quad (1) + 0 \quad (\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \vec{F}_0 &= \vec{\gamma}_{0m} \times \vec{w}_{0m} + d\vec{\gamma} \times \vec{w}_{0m} + \vec{\gamma}_{0m} \times d\vec{w} \\ &\equiv \vec{F}_{0m} + d\vec{F}_0 \end{aligned} \quad (2-9)$$

在准稳定的概念下, 式(2-6)中的 $(2 \vec{\Lambda} \times \vec{w})$ 项就有了它清晰的物理意义, 它代表了从一个准稳定状态过渡到另一准稳定状态的作用力, 此力表现为脉冲式的, 它在数学上是能够被具体表达的, 因而是可以被计算的。最后, 式(2-6)被分解为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \vec{F}_1 &= \vec{F}_{0m} + d\vec{\gamma} \times \vec{w}_{0m} + \vec{\gamma}_{0m} \times d\vec{w} + 2 \vec{\Lambda} \times \vec{w} \\ &\approx \vec{F}_{0m} + (d\vec{\gamma} + 2 \vec{\Lambda}) \times \vec{w}_{0m} + \vec{\gamma}_{0m} \times d\vec{w} + O(\varepsilon^2) \\ &\equiv \vec{F}_{0m} + \rho^{-1} d\vec{F}_1 \end{aligned} \quad (2-10)$$

式(2-10)描述了任一瞬间的举力, 它由一个平均值和一个瞬时扰动值所组成。这样一个思路是与资料[14]中的思路相同的, 为了清楚直观起见, 用图(2)表示了各矢量之间的关系, 这就是本文所要建立的一个模型。它表示了这样一个物理过程: 处于静止状态或均匀运动状态下的叶片(它经受着一个恒定的力), 突然受到一个脉冲的力, 从而改变到另一种均匀运动状态(它经受着另一个恒定的力), 如此继续, 此模型就描述了一个不稳定的含有奇点的过程。

有了这样一个模型, 并被赋予相应的物理意义, 式(2-4)就和式(1-1)类似了。所以, 采取类似于前节中的推导部署, 我们得到

$$\vec{w} = \vec{w}_0 + \nabla \Phi_1 + \vec{A}_1 \quad (2-11-1)$$

$$\vec{\Omega}_1 = \nabla \times \vec{A}_1 - \nabla \times \vec{w}_0 \quad (2-11-2)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = -\nabla \cdot \vec{A}_1 \quad (2-11-3)$$

$$\left(w_{0x} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{A}_1 = -\frac{1}{\rho} \vec{F}_1 \quad (2-11-4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \nabla^2 P &= -\left(w_{0x} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 \Phi_1 = \left(w_{0x} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla \cdot \vec{A}_1 \\ &= -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{F}_1 \end{aligned} \quad (2-11-5)$$

$$(P_1 - P_{01, -\infty}) / \rho = \vec{w}_0 \cdot \vec{A}_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \quad (2-11-6)$$

无论在运动座标或在静止座标中, 当地的静压分布应该是一样的。比较(1-23)式和(2-11-5)式, 我们能推断, 除了差一个常数外, 矢量 \vec{F} 和 \vec{F}_1 的分布应该是一样的。因而矢量 \vec{A} 和 \vec{A}_1 , 同样除了差一常数外, 其分布应是一样的。如果以 \vec{A}_{0m} 表示这样一个

常数, 它代表了举力线奇点通过一均匀流场时所起的作用, 于是

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_{om}, \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_{om} \quad (2-12)$$

于是式(1-25)可以被写成

$$(p_0 - p_{\infty})/\rho = i \vec{V}_0 \cdot \vec{A}_{om} - \frac{\partial \Phi_{om}}{\partial t} + i \vec{V}_0 \cdot \vec{A}_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \quad (1-25-1)$$

当没有举力畸变发生时, 上式变成

$$(p_0 - p_{\infty})/\rho = i \vec{V}_0 \cdot \vec{A}_{om} - \frac{\partial \Phi_{om}}{\partial t} \quad (1-25-2)$$

其结果与资料[8]中的结果一样。于是用类似的考虑, 我们可以从上述诸方程中导出与资料[8]中类似的结果。从(1-25-1)式中, 我们可以导出总压的扰动值

$$\Delta[(p_0 - p_{\infty})/\rho] = i \vec{V}_0 \cdot \vec{A}_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \quad (1-25-3)$$

又若对方程式(2-11-4)两边取旋度, 略去高阶项后, 有

$$\left(w_{ox} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla \times \vec{A}_1 = -\frac{1}{\rho} \nabla \times \vec{F}_1 = -2 \nabla \times (\vec{\Lambda} \times \vec{w}_0) \quad (2-13)$$

$$\text{或} \quad \frac{D \nabla \times \vec{A}_1}{Dt} = -\nabla \times (2 \vec{\Lambda} \times \vec{w}_0) = -\frac{1}{\rho} \nabla \times \vec{F}_1 \quad (2-14)$$

涡度 $\nabla \times \vec{A}_1$ 有着它特有的物理意义, 正如前所述, 它和一脉冲力紧密相关, 这样的脉冲被命名为“流体脉冲”(Fluid impulse)。因为 \vec{A}_1 代表举力线奇点的作用, 这样一个奇点的不断脉冲就造成了一个振动源, 从这样一个概念出发, 我们定义

$\nabla \times \vec{A}_1 \equiv 2 \vec{\gamma}_1$, 然后积分(2-14)式

$$\vec{\gamma}_1 = \int d\vec{\gamma}_1 = -\frac{1}{\rho} \int \frac{1}{2} \nabla \times \vec{F}_1 dt \quad (2-15)$$

对二维流动, 式(2-15)就变成

$$\vec{\gamma}_1 = -\vec{\Lambda} \quad (2-16)$$

这里 $\vec{\gamma}_1$ 是振动源产生的涡度强度, 如果 $|\vec{\gamma}_1| = 0$, 意味着叶片是在一均匀流场中运动, 另一方面 $-2 \vec{\Lambda} \times \vec{w}$ 是科里奥里斯(Coriolis)力的形式, 所以涡轮机械中这类举力畸变可以理解为实际上是由科里奥里斯(Coriolis)力引起的。

(三) 举力的一般表达式

第二节中的一些假设和座标的选择, 使得我们有可能去运用冯·卡门(Vonkarman)和西尔斯(Sears)[4]的办法去处理问题, 虽然他们的理论是用于单个薄机翼的。

在开始处理本文所提出的问题之前, 我们将简单地回顾一些基本概念和假段。

a. 具有尖锐尾部的叶片在运动中将产生一环量; 然而, 根据动量守恒原理, 将有一

个反方向的环量存在于流场之中。产生环量的叶片可以用“有界旋涡”的物理概念来代替，而相应于反环量的旋涡命名为“起始旋涡”。“有界旋涡”和“起始旋涡”组成了一对旋涡，两旋涡线之间的距离在叶片向前方运动的过程中不断增加，忽略掉垂直于运动方向上即 w 方向上的微小横向位移，旋涡对的动量正比于环量和两旋涡线之间的距离的乘积，这个动量是连续增加的，其增加率等于举力。

b. 把一叶片视作一由无数连续分布的旋涡线构成的旋涡片，如果假段“起始旋涡”是那样地远，以致于它不影响在叶片上的流动，那末，薄翼理论认为将是成功的。

c. 围绕叶片的总环量是会由于运动的非均匀性而变化的，这变化将引起叶片后部出现尾流，尾流也被假设为由无数连续分布的旋涡线组成的旋涡片。组成尾流的旋涡线强度是被二个条件所决定的，第一个条件是总环量是不变的，且等于另，第二个条件是尾流旋涡随流体一起流动，即第一节中假设 (d)

根据上列的概念和假设，单位展长上的动量能够用旋涡对的动量之和来表示

$$I = \rho \sum_n \Gamma_n X_n \quad (3-1)$$

举力则是

$$L = -\rho \frac{d}{dt} \sum_n \Gamma_n X_n \quad (3-2)$$

这里， Γ_n 是第 n 个旋涡对的环量

叶片上的旋涡分布是

$$\gamma_2(X) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma''}{\xi - X} \sqrt{\frac{1-X}{1+X}} \sqrt{\frac{\xi+1}{\xi-1}} \quad (3-3)$$

总环量是

$$\Gamma = \int_{-1}^1 \gamma(X) dX = \Gamma'' \left[\sqrt{\frac{\xi+1}{\xi-1}} - 1 \right] \quad (3-4)$$

这里， Γ'' 是尾流的强度，字母 X 代表叶片前缘和后缘之间的座标 X ，字母 ξ 是在尾流中的座标，所以 $\gamma(X)$ 表示“有界旋涡”， $\gamma(\xi)$ 表示“尾流旋涡”，在计算上，叶片的弦长取作 2，0 点放在弦的中间位置，所有的距离标尺都是相对于一半弦长来无量纲化的，所有的力都是在展长方向上来计算的单位长度上的力。

现在，我们将遵循资料 [4] 中的思路去获得我们的结果，为清楚和方便起见，先考虑单个叶片的情况。

旋涡强度 $\gamma(X)$ 包含三个部分，①旋涡 $\gamma_0(X)$ ，它是由机翼的运动所产生的，所以可用薄翼理论算出。这个理论并没有考虑尾流的存在即流动是稳定的，在本文中，我们用了准稳定的概念，所以此值就可被计算。与之相应的环量则用 Γ_0 来表示，②旋涡 $\gamma_1(X)$ 是由流体的脉冲作用所产生的，式 (2-16) 给出其关系式，相应的环量将用 Γ_1 来表示，③旋涡 $\gamma_2(X)$ 是由于尾流的存在所诱导的，相应的环量是 Γ_2 ，其表达式为 [4]

$$\Gamma_2 = \int_1^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\xi+1}{\xi-1}} - 1 \right) \gamma(\xi) d\xi \quad (3-5)$$

式(3-5)中的积分区间是沿着整个尾流长度,并令 $\Gamma'' = \gamma(\xi)d\xi$
围绕机翼的总环量是:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 \\ &= \Gamma_0 + \Gamma_1 + \int_1^{\infty} \left[\sqrt{\frac{\xi+1}{\xi-1}} - 1 \right] \gamma(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3-6)$$

正如前面所述,一个系统的总环量应该为0,即

$$\Gamma + \int_1^{\infty} \gamma(\xi) d\xi = 0$$

$$\text{或 } \Gamma_0 + \Gamma_1 + \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{\xi+1}{\xi-1}} \gamma(\xi) d\xi = 0 \quad (3-7)$$

因为系统的总环量为0,所以系统可以被看作由一对旋涡所组成,所以式(3-1)和(3-2)可以被运用来计算举力。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} I &= \int_{-1}^1 \gamma(X) X dX + \int_1^{\infty} \gamma(\xi) \xi d\xi \\ &= \int_{-1}^1 \gamma_0(X) X dX + \int_{-1}^1 \gamma_1(X) X dX + \int_{-1}^1 \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-X}{1+X}} X dX \int_1^{\infty} \frac{\gamma(\xi)}{\xi-X} \sqrt{\frac{\xi+1}{\xi-1}} d\xi + \\ &\quad + \int_1^{\infty} \gamma(\xi) \xi d\xi \\ &= \int_{-1}^1 \gamma_0(X) X dX + \int_{-1}^1 \gamma_1(X) X dX + \int_1^{\infty} \gamma(\xi) \sqrt{\xi^2-1} d\xi \end{aligned} \quad (3-8)$$

和

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} L &= \frac{-1}{\rho} \frac{dI}{dt} \\ &= - \left[\frac{d}{dt} \int_{-1}^1 \gamma_0(X) X dX + \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 \gamma_1(X) X dX + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dt} \int_1^{\infty} \gamma(\xi) \sqrt{\xi^2-1} d\xi \right] \end{aligned} \quad (3-9)$$

资料[4]给出了如下的表达式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B &= \frac{d}{dt} \int_1^{\infty} \gamma(\xi) f(\xi) d\xi \\ &= w_0 \int_1^{\infty} \gamma(\xi) f'(\xi) d\xi \end{aligned}$$

资料[11]证明了,对任一个二维流场中的流体脉冲,有表达式

$$\frac{d}{dt} \int \gamma_1(X) X dX = 0$$

利用这二个表达式,式(3-9)成为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} L &= -\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} I \\ &= -\frac{d}{dt} \int_{-1}^1 \gamma_0(X) X dX - w_0 \int_1^{\infty} \gamma(\xi) \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} d\xi \end{aligned} \quad (3-10)$$

利用式(3-7),式(3-10)进一步可写成

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} L &= -\frac{d}{dt} \int_{-1}^1 \gamma_0(X) X dX + w_0 \Gamma_0 + w_0 \Gamma_1 + w_0 \int_1^{\infty} \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{\xi^2-1}} d\xi \\ &\equiv \frac{1}{\rho} (L_2 + L_0 + L_1 + L_3) \end{aligned} \quad (3-11)$$

式(3-11)表明,叶片或机翼上的举力可分解为四个部分:

① $L_2 = -\rho \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 \gamma_0(X) X dX$ 被命名为附加质量 (apparent mass) 举力; ② $L_0 =$

$\rho w_0 \Gamma_0$ ——准稳定举力,也就是说当每一瞬时速度和叶片的攻角被看作是能求久维持下去的时候所产生的举力,在本文中,此攻角是被定义为平均速度和瞬时速度间的夹角,所以举力 L_0 实际上代表了准稳定举力的变化值,既然用了准稳定假设,所以 $\gamma_0(X)$ 和 Γ_0 能用静止薄翼理论的公式来计算; ③ $L_1 = \rho w_0 \Gamma_1$ ——流体脉冲举力;

④ $L_3 = \rho w_0 \int_1^{\infty} \gamma(\xi) \frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}} d\xi$ ——尾流影响所产生的举力。

虽然,上面导出的结果是基于孤立机翼(或叶片),但能被引伸到叶栅的情况,只要把相邻叶片的影响考虑进去,这点并不十分困难,因为,对于 $\gamma_0(X)$ 和 Γ_0 来说,已经有不少叶栅的解存在,可供我们选择,又根据二维流场中“流体脉冲”的理论[11],积分 $\Gamma_1 = \int \gamma_1(X) dX$ 很容易解出,最落, $\gamma(\xi)$ 并不是独立于其他的量的,这就是说,一旦其他量被决定, $\gamma(\xi)$ 也就被决定了。

(四) 在小剪切流情况下的应用

一个转子通过一个静止的尾流,能被看作为是运动在一个剪切流中,为简单起见,我们将只考虑一平面叶栅以一个常速度在一小剪切流中运动,这剪切流具有简单的正弦分布形式,在以下行文中,将用复数形式来表示。

$$V_x = V_{\infty} + i V' e^{i\mu y}$$

这里 V_{∞} ——在 x 方向上的绝对速度, V_{∞} ——平均速度, V' ——扰动分量,是 e 的量

级, μ ——频率。

在开始得到我们的结果之前, 先列出一些关系式, 这些关系式将会在推导结果中被先后用到, 我们不再作特别的声明。

图(1)上示明了绝对笛卡儿座标系统 (x, y) 、 (ζ', η') 和 (x', y') 。上游绝对速度 V_0 是在 x 方向上。图上同样也示明了相对的笛卡儿座标系统 (ζ, η) 和 (X, Y) 。这相对座标以常速 U 移动, 相对速度 w_0 是处在 X 方向上, 座标 (X, Y) 不仅平移, 而且以角速度 Λ 在“转动”, 根据前面对座标 (X, Y) 的定义, 应把“转动”理解为“摆动”。 $\alpha = \gamma + \beta = \text{常数}$ 是假设的。在这样的座标系统中, 有下列座标关系:

$$\begin{cases} \zeta' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ \eta' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad (4-2-1)$$

$$\text{或} \begin{cases} x = \zeta' \cos \alpha + \eta' \sin \alpha \\ y = \eta' \cos \alpha - \zeta' \sin \alpha \end{cases} \quad (4-2-2)$$

$$\text{和} \begin{cases} \zeta = \zeta' \\ \eta = \eta' - Ut \end{cases} \quad (4-3)$$

$$\text{和} \begin{cases} X = x \cos(\alpha - \beta) - y \sin(\alpha - \beta) - Ut \sin \beta \\ Y = x \sin(\alpha - \beta) + y \cos(\alpha - \beta) - Ut \cos \beta \end{cases} \quad (4-4-1)$$

$$\text{或} \begin{cases} x = X \cos(\alpha - \beta) + Y \sin(\alpha - \beta) - Ut \cos \alpha \\ y = Y \cos(\alpha - \beta) - X \sin(\alpha - \beta) + Ut \sin \alpha \end{cases} \quad (4-4-2)$$

$$\text{和} \begin{cases} X = x' - Ut \sin \beta \\ Y = y' - Ut \cos \beta \end{cases} \quad (4-5)$$

速度 V_0 和 w_0 之间的关系式是

$$\begin{cases} V_0 \sin \alpha - U = w_0 \sin \beta \\ V_0 \cos \alpha = w_0 \cos \beta \end{cases} \quad (4-6)$$

$$\begin{cases} w_0 = V_0 \cos(\alpha - \beta) - U \sin \beta \\ 0 = V_0 \sin(\alpha - \beta) - U \cos \beta \end{cases} \quad (4-7-1)$$

$$\text{或} \begin{cases} w_0 \sin(\alpha - \beta) = U \cos \alpha \\ w_0 \cos(\alpha - \beta) = V_0 - U \sin \alpha \end{cases} \quad (4-7-2)$$

同样 $\text{tg} \beta = (V_0 \sin \alpha - U) / (V_0 \cos \alpha)$

$$= \text{tg} \alpha - \frac{U}{V_0 \cos \alpha} = f(y) \quad (4-8)$$

又 定义几个新的矢量

$$\begin{cases} \vec{I} = \vec{i} - \vec{j} \text{tg} \alpha \\ \vec{J} = \vec{j} + \vec{i} \text{tg} \alpha \end{cases} \quad (4-9-1)$$

$$\begin{cases} \vec{I} = \vec{I} + \vec{J} \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \left[\vec{i} - \vec{j} \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \right] \\ \vec{J} = \vec{J} - \vec{I} \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \left[\vec{j} + \vec{i} \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \right] \end{cases} \quad (4-9-2)$$

$$\begin{cases} \vec{I}' = \vec{i} \cos(\alpha - \beta) - \vec{j} \sin(\alpha - \beta) \\ \vec{J}' = \vec{i} \sin(\alpha - \beta) + \vec{j} \cos(\alpha - \beta) \end{cases} \quad (4-9-3)$$

式(4-9-3)中的 \vec{I}' 和 \vec{J}' 是单位矢量。

w_0 的矢量形式是

$$\begin{aligned} \vec{w}_0 &= \vec{i} (V_0 - U \sin \alpha) - \vec{j} U \cos \alpha \\ &= \vec{I} V_0 \cos^2 \alpha + \vec{J} (V_0 \sin \alpha - U) \cos \alpha \\ &= V_0 \cos^2 \alpha \vec{I} \\ &= V_0 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \vec{I}' \end{aligned} \quad (4-10)$$

类似于 V_0 , w_0 同样可以分解为平均值和扰动值二个部分

$$\begin{aligned} w_0 &\equiv w_{0m} + \Delta w' \\ &= V_{0m} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta_m} + \left[\frac{\cos \alpha}{\cos \beta_m} + \sin(\alpha - \beta) \operatorname{tg} \beta_m \right] i V' e^{i\mu y} \end{aligned} \quad (4-11)$$

w_0 和 w_{0m} 之间的夹角 θ 是:

$$\theta = \bar{R} \frac{i V'}{w_{0m}} \sin(\alpha - \beta) e^{i\mu y} \Big|_{X=0} \quad (4-12)$$

角速度 $\vec{\Lambda}$ 是

$$\begin{aligned} \vec{\Lambda} &\equiv \frac{\partial \beta}{\partial t} \vec{k} = \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial t} \vec{k} \\ &= -V' \mu \sin^2(\alpha - \beta) e^{i\mu y} \vec{k} \end{aligned} \quad (4-13)$$

这里 \vec{k} 是垂直于 (x, y) 平面的单位矢量, $\vec{\Lambda}$ 的变化率 $\frac{d\vec{\Lambda}}{dt}$, 即角加速度, 不论在静止座标或运动座标中, 都是一样的, 表达式(4-10)在数学上表明了, 如果 (\vec{I}', \vec{J}') 系统被选作为 (X, Y) 系统, 先前各节的结果都可以被应用, 表达式(4-1)和(4-8)表明了叶片的运动是周期性的, 从而诱导运动也应是周期性的, 从式(2-16), 我们有

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= V' \mu \sin^2(\alpha - \beta) e^{i\mu y} \\ &= V' \mu \sin^2(\alpha - \beta) e^{i\mu [Y \cos(\alpha - \beta) - X \sin(\alpha - \beta) U \operatorname{tg} \alpha]} \end{aligned} \quad (4-14)$$

因为 γ_1 代表了振动着的举力线奇点的影响, 叶片又被假设为涡片, 所以应用Dirac函

数 $\delta(Y - m s \cos\beta)$,并积分(4-14)式,就有

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \int_b^d dX \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_1 \delta(Y - m s \cos\beta) dY \\ &= \int_b^d \mu V' \sin^2(\alpha - \beta) e^{i\mu[m s \cos\beta \cos(\alpha - \beta) - X \sin(\alpha - \beta) + Ut \cos\alpha]} dX \\ &= iV' \sin(\alpha - \beta) e^{i\mu[m s \cos\beta \cos(\alpha - \beta) - X \sin(\alpha - \beta) + Ut \cos\alpha]} \Big|_b^d\end{aligned}$$

资料[11]表明了,在二维流动中,这样一类旋涡的积分量是不变的,所以积分限 b 和 d 是可以任意选择的,所以上式就可以写成

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= iV' \sin(\alpha - \beta) e^{i\mu[m s \cos\beta \cos(\alpha - \beta) + Ut \cos\alpha]} \\ &= iV' \sin(\alpha - \beta) e^{ik[w_0 t - a]} \\ &= g_1 e^{ik[w_0 t - a]}\end{aligned}\quad (4-15)$$

这里 $k = \frac{\mu U \cos\alpha}{w_0}$ ——诱导频率, $a = -m s \cos\beta \operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$ 。进一步我们假设,最终的准稳定环量也是周期性的,利用复变量形式,这可以表示成

$$\Gamma_0 = G_0 e^{ik(w_0 t - a)} \quad (4-16)$$

如果运动开始已久,所以横向位移可以略去,这就可假设尾流中旋涡强度能被表示成

$$\gamma(\xi) = g e^{ik[w_0 t - a - \xi]} \quad (4-17)$$

这里, G_0 和 g 不是时间的函数

于是,根据式(3-6),围绕叶片的总环量是

$$\Gamma = e^{ik[w_0 t - a]} \left[G_0 + g_1 + g \int_1^{\infty} \left(\frac{\xi + 1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} - 1 \right) e^{-ik\xi} d\xi \right] \quad (4-18)$$

这里 Γ 也是一个时间的周期函数,因为尾流旋涡的产生是由于叶片环量的变化,环量的增量必须在数值上相等于 $\xi = 1$ 和 $\xi = 1 + w_0 t$ 之间的尾流环量,但是符号相反,即

$\frac{d\Gamma}{dt} dt = -\gamma(1) w_0 dt$ 。微分(4-18),并让 $\frac{d\Gamma}{dt} = -\gamma(1) w_0$ 就有

$$\begin{aligned}\frac{-(G_0 + g_1)}{g} &= \int_1^{\infty} \frac{\xi + 1}{1 \sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-ik\xi} d\xi - \int_1^{\infty} e^{-ik\xi} d\xi + \frac{1}{ik} e^{ik} \\ &= k_0(ik) + k_1(ik)\end{aligned}\quad (4-19)$$

在这里 $k_0(ik)$ 和 $k_1(ik)$ 是以 (ik) 为权的第二类修正贝塞尔函数[4]

于是 $\gamma(\xi) = -(G_0 + g_1) \frac{1}{k_0 + k_1} e^{ik(w_0 t - a - \xi)}$ (4-17-1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} L_3 &= - \int_1^{\infty} w_0 \frac{G_0 + g_1}{k_0 + k_1} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{ik[w_0 t - a - \xi]} d\xi \\ &= -w_0(G_0 + g_1) \frac{k_0}{k_0 + k_1} e^{ik[w_0 t - a]} \\ &= -iw_0(G_0 + g_1) k_0 s(k) e^{ik[w_0 t - a]} \end{aligned} \quad (4-20)$$

这里, $s(k) \equiv \frac{1}{ik(k_0 + k_1)}$ 它已经被制成表格[3]。为应用方便, 我们重印此表作为本文的表(1), 表中 $s(k) = s_r(k) + is_i(k)$ 。

正像上面所提到的, G_0 和 γ_0 可以用通过叶栅的位势流理论的解。在目前, 我们只考虑通过倾斜平板叶栅的流动。这类问题的解是很多的, 下面我们选用了韦宁(Weining)的解[12]

$$\begin{aligned} G_0 &= \Gamma_0 / e^{ik(w_0 t - a)} = 2s \frac{R}{R^2 + 1} \frac{\cos \bar{\theta}_{st}}{\cos \beta} w_{\infty} \bar{\theta} \\ &= 2s \frac{R}{R^2 + 1} \frac{\cos \bar{\theta}_{st}}{\cos \beta} V' \sin(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (4-21)$$

$$\text{或 } \Gamma_0 = 2s \frac{R}{R^2 + 1} \frac{\cos \bar{\theta}_{st}}{\cos \beta} V' \sin(\alpha - \beta) e^{ik(w_0 t - a)} \quad (4-22)$$

$$\begin{aligned} \text{和 } \gamma_0(x) &= \frac{-1}{2} V' \sin(\alpha - \beta) \left[\frac{s}{\pi} \frac{2R}{R^2 + 1} \cos \bar{\beta} \frac{1}{1 - \left(\frac{2R}{R^2 + 1}\right)^2 X^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{s}{\pi} \frac{2R}{R^2 + 1} \frac{R^2 - 1}{R^2 + 1} \sin \bar{\beta} \frac{X}{\sqrt{1 - X^2}} \frac{1}{1 - \left(\frac{2R}{R^2 + 1}\right)^2 X^2} \right] e^{ik(w_0 t - a)} \end{aligned} \quad (4-23)$$

(注意, 和资料[12]中的公式相比, 这里有一个 $\frac{1}{2}$ 的因子之差), 上式中 R 和 $\bar{\theta}_{st}$ 分别为

$$\bar{\theta}_{st} = \text{tg}^{-1} \left[\text{tg} \bar{\beta} \left(\frac{R^2 - 1}{R^2 + 1} \right) \right] \quad (4-23-1)$$

$$\text{和 } \frac{1}{s} = \frac{1}{\pi} \left[\cos \bar{\beta} \ln \left(\frac{R^2 + 2R \cos \bar{\theta}_{st} + 1}{R^2 - 2R \cos \bar{\theta}_{st} + 1} \right) + 2 \sin \bar{\beta} \text{tg}^{-1} \left(\frac{2R \sin \bar{\theta}_{st}}{R^2 - 1} \right) \right] \quad (4-23-2)$$

这里 s 是叶片间距弦长比, β —安装角。

现将式(4-21)代入 L_2 的表达式, 并进行积分, 就得到

$$\frac{1}{\rho} L_2 = - \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} V' \sin(\alpha - \beta) \frac{2sR}{\pi(R^2 + 1)} \left[\frac{\cos \bar{\beta}}{1 - \left(\frac{2R}{R^2 + 1}\right)^2 X^2} - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{R^2-1}{R^2+1} \sin \bar{\beta} \frac{X}{\sqrt{1-X^2}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2R}{R^2+1}\right)^2 X^2}} \Big] e^{ik(w_0 t - a)} X dX \\
 & = -ikw_0 V' \sin(\alpha - \beta) \sin \bar{\beta} \frac{s}{2} \frac{R^2+1}{2R} \frac{R^2-1}{R^2+1} e^{ik(w_0 t - a)} \quad (4-24-1)
 \end{aligned}$$

其余的举力表达式是

$$\frac{1}{\rho} L_0 = w_0 \Gamma_0 = w_0 V' s \frac{2R}{R^2+1} \frac{\cos \bar{\theta}_{st}}{\cos \bar{\beta}} \sin(\alpha - \beta) e^{ik(w_0 t - a)} \quad (4-24-2)$$

$$\frac{1}{\rho} L_1 = w_0 \Gamma_1 = iw_0 V' \sin(\alpha - \beta) e^{ik(w_0 t - a)} \quad (4-24-3)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} L_3 & = -w_0 V' \sin(\alpha - \beta) \left[i + s \frac{2R}{R^2+1} \frac{\cos \bar{\theta}_{st}}{\cos \bar{\beta}} \right] \times \\
 & \times \frac{k_0}{k_0 + k_1} e^{ik(w_0 t - a)} \quad (4-24-4)
 \end{aligned}$$

最终, 总的举力是

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} L & = w_0 V' \sin(\alpha - \beta) \left\{ \left[i + s \frac{2R}{R^2+1} \frac{\cos \bar{\theta}_{st}}{\cos \bar{\beta}} \right] \frac{k_1}{k_0 + k_1} - \right. \\
 & \left. - iks \frac{R^2+1}{4R} \frac{R^2-1}{R^2+1} \sin \bar{\beta} \right\} e^{ik(w_0 t - a)} \\
 & = w_0 V' \sin(\alpha - \beta) Q(k, s, \bar{\beta}) e^{ik(w_0 t - a)} \quad (4-25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{其中 } Q(k, s, \bar{\beta}) & \equiv \frac{\pi}{2} k \left[(J_{1s_i} + y_{1s_i}) + (J_{1s_i} - s_i y_{1s_i}) s \frac{2R}{R^2+1} \frac{\cos \bar{\theta}_{st}}{\cos \bar{\beta}} \right] - \\
 & - i \left[k \frac{s}{2} \frac{R^2+1}{2R} \frac{R^2-1}{R^2+1} \sin \bar{\beta} + \frac{\pi}{2} k \left(\overline{J_{1s_i} + y_{1s_i}} s \frac{2R}{R^2+1} \frac{\cos \bar{\theta}_{st}}{\cos \bar{\beta}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \overline{y_{1s_i} - J_{1s_i}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

这里 $J_1(k)$ 和 $y_1(k)$ 是通常的贝塞尔函数。

压力的中心点通常并不是在弦长的中间位置, 根据资料[13]的推荐, 通常把从前缘算起 $\frac{1}{4}$ 弦长的地方作为压力的中心。换句话说, 举力合力的作用点是在前缘起 $\frac{1}{4}$ 的位置上, 在平面 (x, y) 上, 这点代表举力线, 即奇点, 于是, 根据资料[8]有

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_1 & = \vec{J}' L \delta(X) \delta(Y) \\
 & = \vec{J}' \rho w_0 V' \sin(\alpha - \beta) Q(k, s, \bar{\beta}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ik(w_0 t - a)} \delta\left(X - \frac{a}{k} - m s \sin \beta\right) \times \\
 & \times \delta(Y - m s \cos \beta) \quad (4-26)
 \end{aligned}$$

在 $X = \infty$ 处, 奇点速度, 在积分式 (2-11-4) 后, 可被写成

$$\begin{aligned}
\vec{A}_{1, \infty} &= -\vec{J}' V' \sin(\alpha - \beta) Q(k, s, \bar{\beta}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ik[X - w_0 t - \frac{1}{2} - ms \sin\beta + a]} \times \\
&\quad \times \delta(Y - ms \cos\beta) \\
&= -\vec{J}' V' \sin(\alpha - \beta) Q(k, s, \bar{\beta}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ik[x' - w_0 t - \overline{Ut + ms \sin\beta} - \frac{1}{2} + a]} \times \\
&\quad \times \delta(y' - \overline{Ut + ms \cos\beta}) \\
&= -\vec{J}' V' \sin(\alpha - \beta) Q(k, s, \bar{\beta}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ik[y + ms \sin\beta \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)]} \\
&\quad \times \delta(y' - \overline{Ut + ms \cos\beta}) \quad (4-27)
\end{aligned}$$

这里运用了 $Y = ms \cos\beta$ 这一等式

这个表达式和相应的位势场 Φ_{∞} 都是 s/U 的周期函数, 所以, 适当地选择 $T = Ms/U$, 就有可能得到

$$\int_0^T \frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial t} dt = \Phi_{1, \infty}(y, T) - \Phi_{1, \infty}(y, 0) = 0$$

这里 M 是一正整数。

最后, 通过这样一个叶栅的时间平均总压变化可以从积分式 (1-25-3) 得到,

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta p_{0, \infty}}{\rho} &= \frac{1}{T} \int_0^T \vec{i} \cdot \vec{V}_0 \cdot \vec{A}_{1, \infty} dt \\
&= \frac{U}{s} V' \sin(\alpha - \beta) Q(k, s, \bar{\beta}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\mu[y + ms \sin\beta \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)]} \quad (4-28)
\end{aligned}$$

无量纲化后是: $\frac{\Delta p_{0, \infty}}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{2}{s} \frac{V'}{U} \sin(\alpha - \beta) Q(k, s, \bar{\beta}) \times$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\mu[y + ms \sin\beta \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)]} \quad (4-28-1)$$

须要注意的是, 从式 (4-26) 到 (4-28), X 的原点是放在离前缘 $\frac{1}{2}$ 弦长的地方, 而不是 $\frac{1}{4}$ 弦长处。

(五) 和Henderson的结果比较

要证明目前的结果的方法很多, 最好的方法是直接测量叶片上举力的变化, 和瞬时的总压, 但这是相当困难的道路, 另外的途径是测量时间平均总压的变化, 虽然这办法并不是直接的, 但是比较容易地去实现。亨德森 (Henderson) 曾经做了这类实验, 他同样也进行了计算, 两者相比, 符合的程度是相当满意的。因此, 本文的结果将和亨德森 (Henderson) 的结果比较。对一个气动设计工作者来说, 最关心的是时间平均总压变

化的绝对值,即振幅,所以下面的计算比较,仅限于总压变化的振幅,计算的条件是:安装角 $\beta =$ 空气入口角 $\beta = 45^\circ$, $V_0 \approx U$,当然这与实验上进行的物理过程有些差异,这在比较中会引起误差,但我们并不关心这点误差,因为扰动是 $O(\epsilon)$ 数量级的。利用(4-23-1)式和(4-23-2)式,算得 $R = 1.777$ 和 $\theta_{s_1} = 27.45^\circ$, 当 $s = 1.353$ 时; $R \approx 1$ $\theta_{s_1} = 0$, 当 $s = 0.676$, 为方便起见,诱导频率 k 并没有计算,而是直接取自亨德森 (Henderson) 的计算结果, $s_1(k)$ 和 $s_2(k)$ 则是取自表 1, 计算的最后结果列在表 2 中。表 2 中同样也列入了亨德森 (Henderson) 的计算结果。

比较两者的结果,考虑到不稳定流动的不肯定性,可以认为,目前的结果是满意的。

六、结 论

本文提出了叶片通过小剪切流场时叶片上的不稳定举力的变化的分析解,并与现存的被实验所证明了的结果进行了比较,其结果是令人满意的。分析解指出,不稳定举力的变化实际上是因为由于叶栅运动时有科里奥里斯 (Coriolis) 力,分析解中的函数 Q 是安装角,叶片间距弦长比和上游条件的函数,所以揭示了确定最小总压变化的可能性,如果设计工作者能够适当地选择转子和静止的安装角,叶片间距弦长比、攻角等。

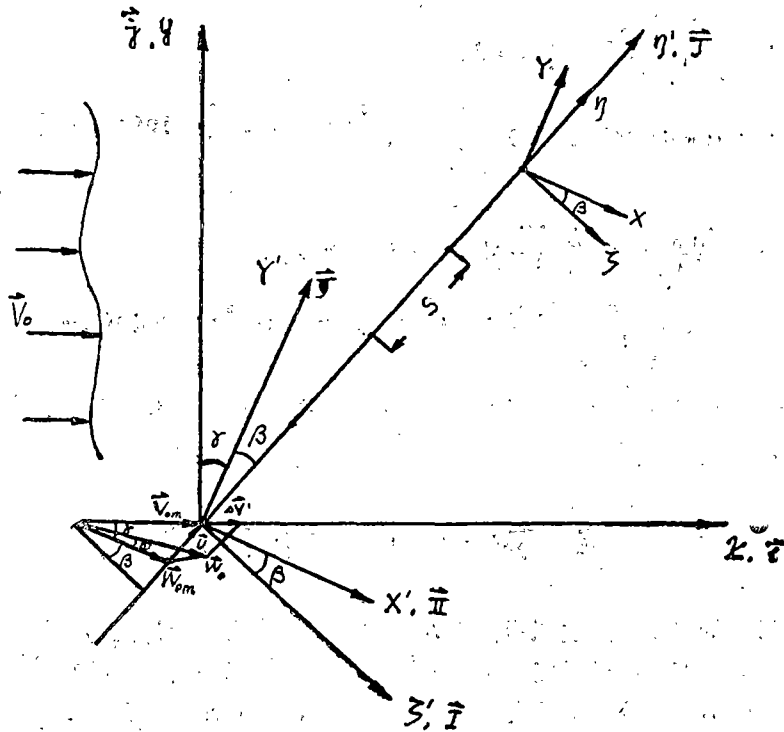


图 1

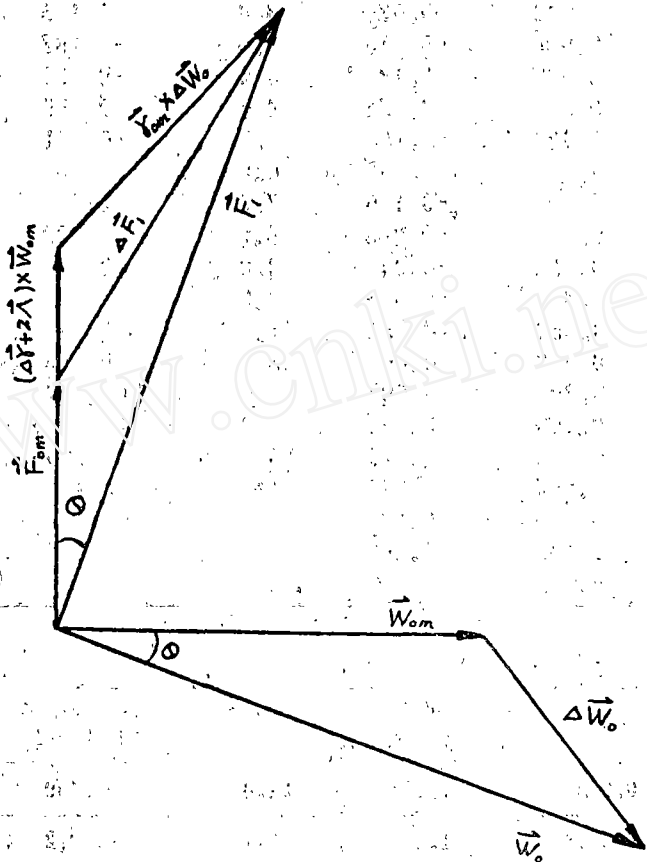


图 2

图 1 中的 \vec{I} 和 \vec{J} 分别改为 \vec{I} 和 \vec{J}

图 2 中的 \vec{F}_1 和 $\Delta \vec{F}_1$ 分别改为 $\frac{1}{\rho} \vec{F}_1$ 和 $\frac{1}{\rho} \Delta \vec{F}_1$

表 1

K	Sr	Si	K	Sr	Si
0	1.000	0	2.5	-0.048	0.247
0.02	0.963	-0.075	3.0	-0.145	0.178
0.04	0.924	-0.114	3.5	-0.197	0.081
0.06	0.887	-0.139	4.0	-0.198	-0.021
0.08	0.852	-0.154	4.5	-0.155	-0.106
0.10	0.821	-0.164	5.0	-0.081	-0.159
0.20	0.702	-0.160	6.0	+0.081	-0.141
0.30	0.624	-0.126	7.0	0.150	-0.008
0.40	0.568	-0.085	8.0	0.082	+0.114
0.50	0.525	-0.044	9.0	-0.049	0.124
0.60	0.488	-0.005	10.0	-0.124	0.002
0.70	0.456	+0.032	11.0	-0.084	-0.036
0.80	0.426	0.066	12.0	+0.026	-0.112
0.90	0.397	0.097	13.0	0.104	-0.037
1.0	0.369	0.126	14.0	0.084	+0.065
1.2	0.312	0.176	15.0	-0.009	0.103
1.4	0.255	0.215	∞	0	0
1.6	0.196	0.242			
1.8	0.138	0.260			
2.0	0.082	0.268			

表 2

S	R	W' 米/秒	Vom 米/秒	本文结果 (4-28-1)	资料[9]的结果
0.676	0.272	1.48	21.66	0.1409	0.0965
0.676	0.542	1.40	22.77	0.1372	0.0860
0.676	0.804	1.48	21.47	0.1117	0.1075
0.676	0.817	1.37	21.45	0.1041	0.1140
0.676	1.082	1.37	22.58	0.0954	0.1055
0.676	1.365	1.26	22.81	0.0847	0.0820
0.676	1.642	1.44	22.21	0.0978	0.1030
1.353	0.275	1.45	21.70	0.0853	0.0720
1.353	0.542	1.33	22.77	0.0620	0.0623
1.353	0.822	1.37	21.49	0.0617	0.0755
1.353	1.368	1.24	22.81	0.0493	0.0583
1.353	1.655	1.42	22.19	0.0557	0.0555

参 考 资 料

- 〔1〕 N.H.Kemp and W.R.Sears
“Aerodynamic Interference Between Moving Blade Rows”
J.of the Aeronautical Sciences, September, 1953 Vol.20
- 〔2〕 N.H.Kemp and W.R.Sears
“The Unsteady Forces Due to Viscous Wakes in Turbomachines”
J.of the Aeronautical Sciences, 1955, Vol.22
- 〔3〕 N.H.Kemp
“On the Lift and Circulation of Airfoils in Some Unsteady Flow Problems”
J.of the Aeronautical Sciences, June, 1952
- 〔4〕 Von Karman and W.R.Sears
“Airfoil Theory for Non—Uniform Motion”
J.of the Aeronautical Sciences, August, 1938 Vol.5
- 〔5〕 J.H.Preston
“The Non—Steady Flow of An Inviscid Incompressible Fluid With Special Reference to Changes in Total Pressure Through Flow Machines”
Aero nautical Quarterly Vol.XII, Part 4, November, 1961
- 〔6〕 J.H.Horlock
“Unsteady Flow in Turbo—machines”
Third Australasian Conference on Hydraulics and Fluid Mechanics
Paper No.2674, Sydney November, 1965
- 〔7〕 J.H.Horlock
“Fluctuating Lift Forces on Airofoils Moving Through Transverse and Chordwise Gusts”
ASME Paper No.68—FE—28
- 〔8〕 W.R.Hawthorne
“Flow Through Moving Cascades of Lifting Lines With Fluctuating Lift”
J.Mechanical Engineering Science, Vol.15, No.1, 1973
- 〔9〕 R.E.Henderson
“The Unsteady Response of An Axial Flow Turbomachine To An Upstream Disturbance”
Thsis, Cambridge, 1972

- [10] J.H.Horlock and H.Daneshyar
"Stagnation Pressure Changes in Unsteady Flow"
Aeronautical Quarterly Vol.xxll, August,1971
- [11] G.K.Batchelor
"An Introduction To Fluid Dynamics"
Cambridge,1970
- [12] J.H.Horlock
"Axial Compressor" 1966
- [13] W.F.Durand, Editor-in-chief.
"Aerodynamic Theory", Vol.2
Julius Springer, Berlin,1935
- [14] W.R.Hawthorne, Private Communication,1975