

加筋圆柱曲板的侧压稳定性

中国科学院北京力学研究所十二室

提 要 本文对四边简支加筋圆柱曲板在侧向压力作用下的弹性稳定问题进行了计算。把加筋曲板作为各向异性曲板处理,考虑加筋位置偏心及筋条抗扭刚度的影响,在经典简支和直边顶住简支两种边界条件下,采用线性理论。对有关参数进行分析,找出影响临界载荷的主要参数,给出便于使用的曲线。

计算表明:直边顶住对临界载荷影响较大, β 越大,影响越大。环向加筋对提高承受侧压的能力作用明显。一般而言,环向筋加在曲板里侧比加在外侧好。

在航空结构中,经常遇到加筋圆柱曲板在侧向压力作用下的稳定问题。曾有许多作者〔1, 2, 3〕研究过加筋圆柱壳的弹性稳定问题,并发现加筋偏心对临界载荷有较大的影响。有关加筋曲板侧压稳定问题的文章很少看到¹⁾。

本文把加筋曲板作为各向异性曲板处理(至于这样处理的适用范围,在论文〔7〕中讨论)在弹性范围内,采用小挠度扁壳方程,考虑经典简支和直边顶住简支两种边界条件,求得了侧压临界载荷计算公式。

加筋偏心对临界载荷的影响及物理解释,在文献〔2, 3〕中有详尽的讨论。本文计算表明:偏心对临界载荷影响较大,必须考虑。一般而言,侧压作用的加筋曲板,环向筋加在曲板里侧比加在外侧好。

对单层板,文献〔5〕曾给出直边顶住简支边界条件的解,用试凑法求解比较麻烦。本文采用拉格朗日乘子法〔6〕求解,证明了直边顶住边界条件的解位于相应的经典简支边界条件解的第一和第二特征值之间。我们又在这个区间上采用优选法寻找根的位置,比较迅速地求出临界载荷。计算表明:直边顶住对临界载荷有较大影响, β 越大,影响越大。本计算是在电子计算机上完成的。

虽然大量计算是针对仅有环向加筋的情况,但临界载荷计算公式,对有纵向加筋情况同样适用。

本文计算结果有待于实验验证。

1) 本工作进行中,看到了Simitieses的报告。〔4〕

一、基本假设

1. 筋较密，加筋曲板可以作为各向异性曲板处理；2. 采用扁壳方程（即 Donnell 方程）；3. 在弹性范围内，采用线性理论；4. 筋条等间距分布在面板上；5. 直法线假设，垂直于中面的法线变形后仍垂直于中面，这假设也适用于筋条；6. 筋条与面板连接处位移相等；7. 考虑加筋位置对面板偏心的影响；8. 考虑筋的扭转刚度，但忽略筋的承剪能力和纵横筋之间横向变形的影响；9. 屈曲前为无矩应力状态。

二、经典简支边界条件的解

1. 基本方程 对于如图 1 所示的正交各向异性圆柱曲板，考虑弯曲和拉压耦合，不考虑扭转和面向剪切耦合，广义力和广义位移一般有下列关系：

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ N_x \\ N_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -D'_x & -D'_{xy} & F_x & F_{xy} \\ -D'_{xy} & -D'_y & F_{yx} & F_y \\ F_x & F_{yx} & A_x & A_{xy} \\ F_{yx} & F_y & A_{xy} & A_y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} \quad (2-1)$$

$$\begin{Bmatrix} H \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_k & 0 \\ 0 & C_{xy} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \nu_{xy} \end{Bmatrix}$$

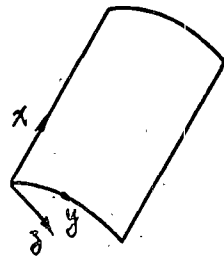


图 1

下面将以 w 和应力函数 ϕ 为变量，将式 (2-1) 改写为

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -D_x & -D_{xy} & f_x & f_{xy} \\ -D_{xy} & -D_y & f_{yx} & f_y \\ f_x & f_{yx} & \frac{1}{B_x} & \frac{1}{B_{xy}} \\ f_{xy} & f_y & \frac{1}{B_{xy}} & \frac{1}{B_y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ N_x \\ N_y \end{Bmatrix} \quad (2-2)$$

$$\begin{Bmatrix} H \\ \nu_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -D_k & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{xy}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ N_{xy} \end{Bmatrix}$$

式中 $\epsilon_x, \epsilon_y, \nu_{xy}$ 是面板中面应变; $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, H$ 是截面力和内力矩, $D_x, D_y, D_{xy}, B_x, B_y, B_{xy}, f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}$ 是加筋板的基本参数。关于基本参数的计算公式见附录。

曲板的屈曲平衡方程和协调方程为

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ & + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \\ & \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \nu_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \right\} (2-3)$$

其中 N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0 是失稳前无矩状态的中面力 (在侧压情况下, $N_x^0 = N_{xy}^0 = 0$; $N_y^0 = -PR$)。

将式 (2-2) 代入式 (2-3), 并注意到

$$N_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

可得加筋圆柱曲板稳定方程

$$\left. \begin{aligned} & D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{xy} + 2D_k) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - f_{xy} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \\ & - (f_x + f_y) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} - f_{yx} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ & \frac{1}{B_y} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \left(\frac{2}{B_{xy}} + \frac{1}{C_{xy}} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + f_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ & + (f_x + f_y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + f_{yx} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \right\} (2-4)$$

从式 (2-4) 中消去应力函数 ϕ , 得到仅有 w 的方程

$$\nabla_D^4 \nabla_B^4 w + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nabla_f^4 \nabla_f^4 w + 2\nabla_f^4 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \nabla_B^4 (N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \quad (2-5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \nabla_D^4 &= D_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{xy} + 2D_k) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} \\ \nabla_B^4 &= \frac{1}{B_y} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \left(\frac{2}{B_{xy}} + \frac{1}{C_{xy}} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \\ \nabla_f^4 &= f_{xy} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + (f_x + f_y) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + f_{yx} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \end{aligned} \right\} (2-6)$$

2. 经典简支边界条件

$$\left. \begin{array}{l} \text{在 } x=0, l \text{ 处, } w=M_x=N_x=v=0 \\ \text{在 } y=0, b \text{ 处, } w=M_y=N_y=u=0 \end{array} \right\} (2-7)$$

3. 解法 设

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2-8)$$

式(2-8)满足式(2-7)所示的边界条件。将式(2-8)代入式(2-5), 经过整理, 可得临界载荷公式

$$K_P = \frac{1}{n^2\beta^2} \left\{ [d_1 m^4 + d_2 m^2 n^2 \beta^2 + n^4 \beta^4] + \frac{[K_4 (m^4 f_1 + m^2 n^2 \beta^2 f_2 + n^4 \beta^4) + K_2 m^2]^2}{m^4 + B_1 m^2 n^2 \beta^2 + B_2 n^4 \beta^4} \right\} \quad (2-9)$$

式中无量纲参数意义如下:

$$\left. \begin{array}{l} d_1 = \frac{D_x}{D_y}, \quad d_2 = 2 \frac{D_{xy} + 2D_k}{D_y} \\ B_1 = B_y \left(\frac{2}{B_{xy}} + \frac{1}{C_{xy}} \right), \quad B_2 = \frac{B_y}{B_x} \\ f_1 = \frac{f_{xy}}{f_{yx}}, \quad f_2 = \frac{f_x + f_y}{f_{yx}} \\ \beta = \frac{l}{b}, \quad K_2 = \sqrt{\frac{B_y}{D_y}} \frac{l^2}{\pi^2 \cdot R} \\ K_4 = -\sqrt{\frac{B_y}{D_y}} f_{yx}, \quad K_p = \frac{-N_y^0 l^2}{D_y \pi^2} = \frac{PRl^2}{D_y \pi^2} \end{array} \right\} (2-10)$$

对于给定的 $d_1, d_2, B_1, B_2, f_1, f_2, K_2, K_4, \beta$ 等参数, 用式(2-9)计算相应于不同 m, n 值的临界值, 取最小的值即为所需要的临界载荷值。

4. 计算结果 加筋曲板参数太多[见式(2-10)], 要找出 K_P 对所有参数的关系几乎是不可能的。下面根据侧压的具体情况简化处理如下:

(甲)在仅有环向筋的情况下, $f_1 = 0, f_2 = -3.333$ 。不难看出 $m=1$ 时 K_P 取最小值。若 $m=1$, 则式(2-9)中 d_2 可以移到等号左边。以后仅给出 $K_P - d_2$ 的曲线。

d_1 对 $K_P - d_2$ 的影响很小(见表1), 以后仅给出 $d_1 = 0.002$ 的曲线。

表1 d_1 对 K_P 的影响 ($\beta=1, K_4=0$)

K_2 $K_P - d_2$		d_1									
		3	5	10	30	50	100	300	500	1000	5000
0.002	经典	3.054	4.225	4.902	9.903	11.51	17.96	29.83	38.41	54.41	122.3
	顶住	5.461	7.963	9.340	12.36	17.10	21.96	35.55	43.82	59.95	128
0.1	经典	3.152	4.25	4.926	9.914	11.52	17.96	29.83	58.41	54.41	122.3
	顶住	5.483	8.013	9.351	12.37	17.10	21.97	35.56	43.82	59.95	127.9

表 1 中的数值是对 $B_1 = 2.286, B_2 = 1.1, f_1 = 0, f_2 = -3.333$ 计算的。

(乙) 只有环向筋时, $B_1 = 2 \frac{B_2 - \nu}{1 - \nu}$ 。 B_1, B_2 可以合并为一个参数。我们取 $B_1 = 1.1$,

1.3, 1.5, 1.7 进行计算。

(丙) 在 K_2 较大时, β 的影响不大, 我们仅给出包络线 (这样的近似是合理的, 也是偏于安全的)。在 K_2 较小时, 分别对不同的 β 给出了 $n=1$ 的值。

最后, 剩下 K_2, K_4 二个参数。取 $K_4 = 0, \pm 0.05, \pm 0.1, \pm 0.2, \pm 0.5$ 以及 16 个 K_2 值进行计算, 结果见图 3。

由图 5 可以看出, $K_4 < 0$ 的 K_P 值比 $K_4 > 0$ 的 K_P 值小。 $K_4 < 0$ 表示筋加在外侧, $K_4 > 0$ 表示筋加在里侧。所以对环向筋, 加在曲板里侧比加在曲板外侧好。

三、直边顶住筒支边界条件的解

1. 顶住筒支边界条件

$$\left. \begin{array}{l} \text{在 } x = 0, 1 \text{ 处,} \\ \text{在 } y = 0, b \text{ 处,} \end{array} \right\} \begin{array}{l} w = M_x = N_x = v = 0 \\ w = M_y = u = 0, v = 0 \end{array} \quad (3-1)$$

与经典筒支边界条件相比, 只是在 $y=0, b$ 处 $v=0$ 这一条件不同。这样式 (2-8) 表达的挠度函数不能满足边界条件 (3-1)。下面采用拉格朗日乘子法 [6] 进行求解。

2. 总势能表达式 加筋圆柱曲板总势能一般表达式为

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \iint [M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (M_{xy} + M_{yx}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_x \epsilon_x + N_y \epsilon_y \\ & + N_{xy} v_{xy}] dx dy - \frac{1}{2} \iint [N_y^0 (\frac{\partial w}{\partial y})^2 + N_x^0 (\frac{\partial w}{\partial x})^2 \\ & + N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}] dx dy \end{aligned} \quad (3-2)$$

其中, 前一项为应变能, 后一项为外力势。本文仅涉及侧压, 所以 $N_y^0 = -PR, N_x^0 = N_{xy}^0 = 0$ 。

将 $M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, N_x, N_y, N_{xy}$ 的表达式代入式 (3-2), 并利用中面应变表达式

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}, \quad v_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

可得总势能为

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \iint \left\{ D [(1 + \eta_1) (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^2 + (1 + \eta_2) (\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2 \right. \\ & \left. + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + 4D_k (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2 + B [(1 + \mu_1) (\frac{\partial u}{\partial x})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 + \mu_2) \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right)^2 + 2v \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) \\
& + \frac{1-v}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 2\chi_1 \sqrt{\frac{D}{B}} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\chi_2 \sqrt{\frac{D}{B}} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right. \\
& \left. - \frac{w}{R} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \} dx \cdot dy - \frac{1}{2} \iint N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy \quad (3-3)
\end{aligned}$$

3. 拉格朗日乘子法 设位移函数

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (3-4) \\
w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b}
\end{aligned}$$

表达式(3-4)满足式(3-1)中所列除了 $y=0, b$ 处 $v=0$ 以外的所有边界条件。若对式(3-4)作一定限制,使下述两个条件满足:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_{mn} = 0 \quad (3-5)$$

则式(3-4)满足式(3-1)的所有边界条件。

$$\begin{aligned}
\text{令 } \bar{U} &= U - \lambda_1 \sum_n v_{mn} - \lambda_2 \sum_n (-1)^n v_{mn} \\
&= U - \lambda_1 \sum_{n=1,3,5}^{\infty} v_{mn} - \lambda_2 \sum_{n=2,4,6}^{\infty} v_{mn} \quad (3-6)
\end{aligned}$$

其中 λ_1, λ_2 为拉格朗日乘子。根据拉格朗日乘子法,若 $\delta \bar{U} = 0$,则将导出平衡方程 $\delta \bar{U} = 0$,即

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial u_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial v_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial w_{mn}} = 0 \quad (3-7)$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial \lambda_2} = 0 \quad (3-8)$$

将式(3-4)代入式(3-3)并进行积分,得到用 u_{mn}, v_{mn}, w_{mn} 表示的 \bar{U} ,则式(3-7)中的三式可写为

$$a_{11} u_{mn} + a_{12} v_{mn} + a_{13} w_{mn} = 0$$

$$a_{21}u_{mn} + a_{22}v_{mn} + a_{23}w_{mn} = \begin{cases} \lambda_1, & \text{若 } n=1,3,5,\dots \\ \lambda_2, & \text{若 } n=2,4,6,\dots \end{cases} \quad (3-9)$$

$$a_{31}u_{mn} + a_{32}v_{mn} + a_{33}w_{mn} = 0$$

式(3-8)为

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} v_{mn} = 0$$

$$\sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} v_{mn} = 0 \quad (3-10)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= (1 + \mu_1)m^2 + \frac{1 - \nu}{2}n^2\beta^2, \\ a_{12} &= \frac{1 + \nu}{2}mn\beta, \\ a_{13} &= \frac{\pi}{I}\sqrt{\frac{D}{B}}(\nu m K_r - m^3\chi_1), \\ a_{21} &= \frac{1 + \nu}{2}mn\beta, \\ a_{22} &= \frac{1 - \nu}{2}m^2 + (1 + \mu_2)n^2\beta^2, \\ a_{23} &= \frac{\pi}{I}\sqrt{\frac{D}{B}}[(1 + \mu_2)n\beta K_r - n^3\beta^3\chi_2], \\ a_{31} &= \sqrt{\frac{D}{B}}\frac{\pi}{I}[\nu m K_r - m^3\chi_1], \\ a_{32} &= \sqrt{\frac{D}{B}}\frac{\pi}{I}[(1 + \mu_2)n\beta K_r - n^3\beta^3\chi_2], \\ a_{33} &= \frac{D}{B}\left(\frac{\pi}{I}\right)^2[(1 + \eta_1)m^4 + 2\left(\nu + \frac{2D_K}{D}\right)m^2n^2\beta^2 \\ &\quad + (1 + \eta_2)n^4\beta^4 + (1 + \mu_2)K_r^2 - 2n^2\beta^2K_r\chi_2 - n^2\beta^2\bar{K}_P] \end{aligned} \right\} (3-11)$$

由方程(3-9)可以得到:

$$v_{mn} = \frac{\Delta'}{\Delta}\lambda_i \quad \begin{aligned} i &= 1, & \text{若 } n=1,3,5,\dots \\ i &= 2, & \text{若 } n=2,4,6,\dots \end{aligned} \quad (3-12)$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

把式(3-11)式中的 a_{ij} 代入,得

$$\begin{aligned}
\Delta = & [(1 + \eta_1)m^4 + 2(v + \frac{2D_K}{D})m^2n^2\beta^2 + (1 + \eta_2)n^4\beta^4 \\
& - n^2\beta^2\bar{k}_P] \left\{ \frac{1-v}{2}(1 + \mu_1)m^4 + [(1 + \mu_1)(1 + \mu_2) - v]m^2n^2\beta^2 \right. \\
& + \frac{1-v}{2}(1 + \mu_2)n^4\beta^4 \left. \right\} + \left\{ (-\frac{1-v}{2}\chi_1^2)m^8 + v(1-v)K_r\chi_1m^6 \right. \\
& + \frac{1-v}{2}[(1 + \mu_1)(1 + \mu_2) - v^2]K_r^2m^4 - (1 + \mu_2)\chi_1^2m^6n^2\beta^2 \\
& + (1 + v)\chi_1\chi_2m^4n^4\beta^4 - (1 - v)[(1 + v_2)\chi_1 + (1 + \mu_1)\chi_2]K_r m^4n^2\beta^2 \\
& \left. - (1 + \mu_1)\chi_2^2m^2n^6\beta^6 + v(1 - v)K_r\chi_2m^2n^4\beta^4 - \frac{1-v}{2}\chi_2^2n^8\beta^8 \right\}
\end{aligned}$$

(3-13)

$$\begin{aligned}
\Delta' = & \frac{D}{B} \frac{\pi}{1} \left\{ [(1 + \eta_1)m^4 + 2(v + \frac{2D_K}{D})m^2n^2\beta^2 \right. \\
& + (1 + \eta_2)n^4\beta^4] [(1 + \mu_1)m^2 + \frac{1-v}{2}n^2\beta^2] + m^2K_r^2[(1 + \mu_1)(1 + \mu_2) \\
& - v^2] + \frac{1-v}{2}(1 + \mu_2)K_r^2n^2\beta^2 - 2(1 + \mu_1)K_r\chi_2m^2n^2\beta^2 \\
& - (1 - v)K_r\chi_2n^4\beta^4 + 2vm^4K_r\chi_1 - \chi_1^2m^6 - n^2\beta^2\bar{k}_P[(1 + \mu_1)m^2 \\
& \left. + \frac{1-v}{2}n^2\beta^2] \right\}
\end{aligned}$$

对于经典简支边界条件，式(3-9)右端为零。则 $\Delta = 0$ 可得临界载荷。

由 $\Delta = 0$ ，立即可以得到论文〔7〕中式(23)（只是由于 β ， K_r ， χ_1 ， χ_2 定义不同，而有细微差别）：

$$\begin{aligned}
\bar{k}_P = & \frac{1}{n^2\beta^2} \left\{ [(1 + \eta_1)m^4 + 2(v + \frac{2D_K}{D})m^2n^2\beta^2 + (1 + \eta_2)n^4\beta^4] \right. \\
& + \frac{1}{\frac{1-v}{2}(1 + \mu_1)m^4 + [(1 + \mu_1)(1 + \mu_2) - v]m^2n^2\beta^2 + \frac{1-v}{2}(1 + \mu_2)n^4\beta^4} \\
& [(-\frac{1-v}{2}\chi_1^2)m^8 + v(1-v)K_r\chi_1m^6 + \frac{1-v}{2}[(1 + \mu_1)(1 + \mu_2) - v^2]K_r^2m^4 \\
& - (1 + \mu_2)\chi_1^2m^6n^2\beta^2 + (1 + v)\chi_1\chi_2m^4n^4\beta^4 - (1 - v)[(1 + \mu_2)\chi_2 \\
& + (1 + \mu_2)\chi_1]K_r m^4n^2\beta^2 - (1 + \mu_1)\chi_2^2m^2n^6\beta^6 + v(1 - v)K_r\chi_2m^2n^4\beta^4 \\
& \left. - \frac{1-v}{2}\chi_2^2n^8\beta^8] \right\}
\end{aligned}$$

(3-14)

我们再回到式(3-13)。为了与经典简支边界条件结果比较,将符号统一。注意到

$$\left. \begin{aligned} K_r &= K_2 \sqrt{\frac{D_y(1+\mu_1)}{D[(1+\mu_1)(1+\mu_2)-v^2]}} \\ \chi_2 &= \frac{K_4}{v} \sqrt{\frac{D_y}{D} (1+\mu_1)[(1+\mu_1)(1+\mu_2)-v^2]} \\ \chi_1 &= f_1 \chi_2 \\ (1+\mu_1)\chi_2 + (1+\mu_2)\chi_1 \\ &= -K_4 \cdot f_2 \sqrt{\frac{D_y}{D} (1+\mu_1)[(1+\mu_1)(1+\mu_2)-v^2]} \end{aligned} \right\} (3-15)$$

则式(3-13)可以写成

$$\Delta = (d_1 m^4 + d_2 m^2 n^2 \beta^2 + n^4 \beta^4 - n^2 \beta^2 K_P) (m^4 + B_1 m^2 n^2 \beta^2 + B_2 n^4 \beta^4) + [K_4 (m^4 + f_1 m^2 n^2 \beta^2 + f_2 n^4 \beta^4) + K_2 m^2]^2 \quad (3-16)$$

$$\begin{aligned} \Delta' &= \frac{D_y}{B} \frac{\pi}{1} \left\{ [(m^4 d_1 + d_2 m^2 n^2 \beta^2 + n^4 \beta^4) + m^4 K_4^2 f_1^2 \frac{(1+\mu_1)(1+\mu_2)}{v^2}] \right. \\ &\quad + n^4 \beta^4 K_4^2 \frac{(1+\mu_1)^2}{v^2} - 2m^2 n^2 \beta^2 K_4^2 \cdot f_1 \frac{1+\mu_1}{v} + \frac{(1+\mu_1)(1+\mu_2)}{(1+\mu_1)(1+\mu_2)-v^2} K_2^2 \\ &\quad - 2(1+\mu_1) \frac{K_2 K_4}{v} n^2 \beta^2 - n^2 \beta^2 k_P] [(1+\mu_1) m^2 + \frac{1-v}{2} n^2 \beta^2] \\ &\quad \left. - \left(\frac{vmK_2}{(1+\mu_1)(1+\mu_2)-v^2} - m^3 \frac{K_4 f_1}{v} \right)^2 (1+\mu_1)[(1+\mu_1)(1+\mu_2)-v^2] \right\} \end{aligned}$$

把式(3-16)代入式(3-12),经过整理。 $\sum_n V_{mn} = 0$ 可以用下式表达:

$$\sum_n \frac{A_{mn} - B_{mn} K_P}{k_{Pmn} - K_P} = 0 \quad \begin{array}{l} n = 1, 3, 5, \dots \\ \text{或 } n = 2, 4, 6, \dots \end{array} \quad (3-17)$$

其中 k_{pmn} 是经典简支边界条件下,相应半波数为 m, n 的特征值,即公式(2-9)。

A_{mn}, B_{mn} 计算公式如下:

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{1}{(m^4 + B_1 m^2 n^2 \beta^2 + B_2 n^4 \beta^4)} \left\{ \left[K_2^2 \left(\frac{m}{n\beta} \right)^2 + \frac{(1-v)(1+\mu_2)}{2[(1+\mu_1)(1+\mu_2)-v^2]} \right] \right. \\ &\quad - 2K_2 K_4 \left[m^2 \left(\frac{m}{n\beta} \right)^2 f_1 - \frac{1-v}{2v} (n\beta)^2 - \frac{1+\mu_1}{v} m^2 \right] \\ &\quad - m^4 \left(\frac{m}{n\beta} \right)^2 \frac{f_1^2 K_4^2}{v^2} [(1+\mu_1)(1+\mu_2)-v^2] \\ &\quad + \left[\left(\frac{m}{n\beta} \right)^2 + \frac{1-v}{2(1+\mu_1)} \right] [(m^4 d_1 + d_2 m^2 n^2 \beta^2 + n^4 \beta^4) \\ &\quad \left. + \frac{(1+\mu_1)K_4^2}{v^2} [(1+\mu_2)f_1^2 m^4 + (1+\mu_1)n^4 \beta^4 - 2m^2 n^2 \beta^2 v f_1] \right\} \end{aligned} \quad (3-18)$$

$$B_{mn} = \frac{\left[m^2 + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{(1+\mu_1)} \right]}{\left[m^4 + B_1 m^2 n^2 \beta^2 + B_2 n^4 \beta^2 \right]}$$

式(3-17)为顶住简支边界条件下临界载荷计算公式。对一组给定的参数, $d_1, d_2, \mu_1, \mu_2, f_1, f_2, K_2, K_4, \beta$ (B_1, B_2 可以从 μ_1, μ_2 求出)用式(3-17)计算,先取定一个 m 值,然后取 $n=1, 3, 5, \dots$ 求出相应于 y 方向对称失稳的临界值,再取 $n=2, 4, 6, \dots$ 求出相应于 y 方向反对称失稳的临界载荷值。再变换 m 值,重复上述计算,选最小的一个为我们所需要的解。一般而言,取 $m=1$ 即可得极小解。

4. 计算方法和结果 实际计算表明,式(3-17)中 $B_{mn} \ll A_{mn}$ 。为了说明寻找式(3-17)的解的方法,将其暂时写为

$$\sum_n v_{mn} = \frac{A_{mn}}{k_{pmn} - K_p} = 0 \quad n=1, 3, 5, \dots \quad (3-17')$$

若 $k_p^{(1)} < k_p^{(2)} < k_p^{(3)}, \dots$, 不难看出式(3-17')最小的根 K_p 必须满足 $k_p^{(1)} < K_p < k_p^{(2)}$ 。图2给出了 $\sum_n v_{mn}$ 的大致趋向。在 $K_p < k_p^{(1)}$ 时是没有解的。而在 $[k_p^{(1)}, k_p^{(2)}]$ 区间上必有一解。这样就克服了文献[5]所述寻找根的困难。

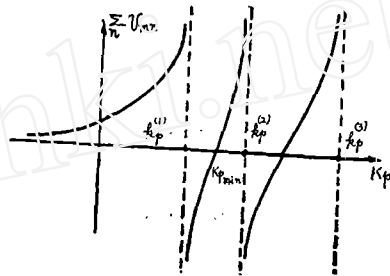


图 2

具体步骤是,先找出 $k_p^{(1)}$ 和 $k_p^{(2)}$ 的值,然后在 $[k_p^{(1)}, k_p^{(2)}]$ 区间上采用优选法进行试算,直到满足误差要求为止。我们取 $m=1, 3; n=1, 3, 5, \dots, 31$ 和 $n=2, 4, 6, \dots, 32$ 进行计算。表2列出的关于光板的结果表明与文献[5]计算结果相同。这表明我们取的项数是足够的。

表 2 本文结果与 Singer 结果的对比 ($\beta = 1.499$)

K_2	143.6	192.5	253.2	412.6	825.2	1237.8	1650.4
经典简支	24.53 对称	26.34 对称	29.31 对称	40.96 对称	51.85 反对称	66.53 对称	73.02 对称
顶住简支	34.04 对称	39.61 反对称	41.83 反对称	50.08 反对称	65.35 对称	77.94 对称	89.04 反对称
顶住/经典	1.388	1.503	1.427	1.222	1.26	1.171	1.219

Z	182	244	321	523	1046	1569	2092
SS4/SS3	1.39	1.50	1.42	1.21	1.26	1.17	1.22

上面四行是本文结果，下面两行是文献[5]的结果。比较第四行和第六行可看出是完全相同的。其中，第二行，第三行内所注“对称”与“反对称”表示失稳时在y方向呈现的波形。

图3给出了 $K_4 = -0.05$, $B_2 = 1.1$ 情况下的计算结果。在右下角，图3α给出 $K_2 = 10$ ，对不同β值，直边顶住简支与经典简支结果的比较。由图可见，对某一β值，若在SS4曲线上是波峰，相应SS3曲线上的点是在波谷，则 $K_p(SS4)$ 可能比 $K_p(SS3)$

高达4—5倍。如 $\beta = 2.2$ 时 $\frac{K_p(SS4)}{K_p(SS3)} \approx 5$ 。而在相反情况，即SS4曲线上的波

谷，相应SS3曲线上是波峰，则相差倍数较小。但总的趋势是β越大，直边顶住边界条件影响越大。

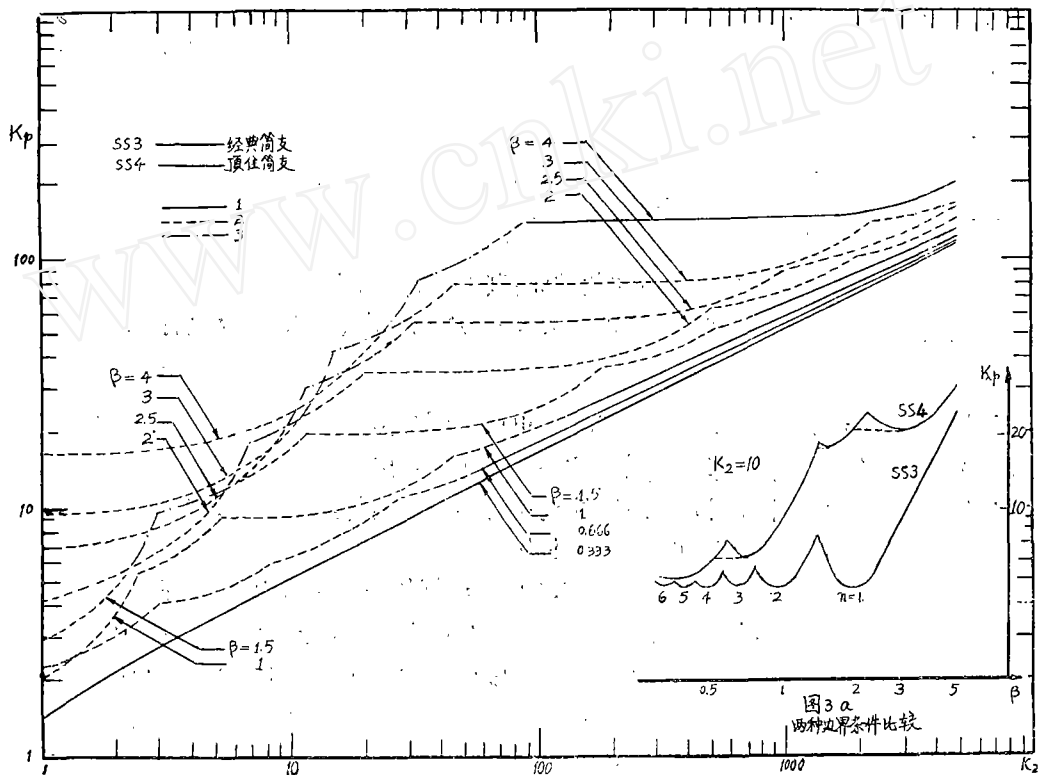


图3 环向加筋曲板临界载荷曲线

($d_1 = 0.002, B_2 = 1.1, f_2 = -333, K_4 = -0.05$)

图3曲线中，细实线1表示与图4曲线相重合的部分，虚线2表示取包络线后，与图4相同的部分，而点划线3表示较小β值的 K_p 值反而比较大β值的 K_p 值高的部分。在图4中点划线部分就“砍”掉了（这样做是合理的，是偏于安全的。相当于在图3α中用虚线代替相应实线部分）。

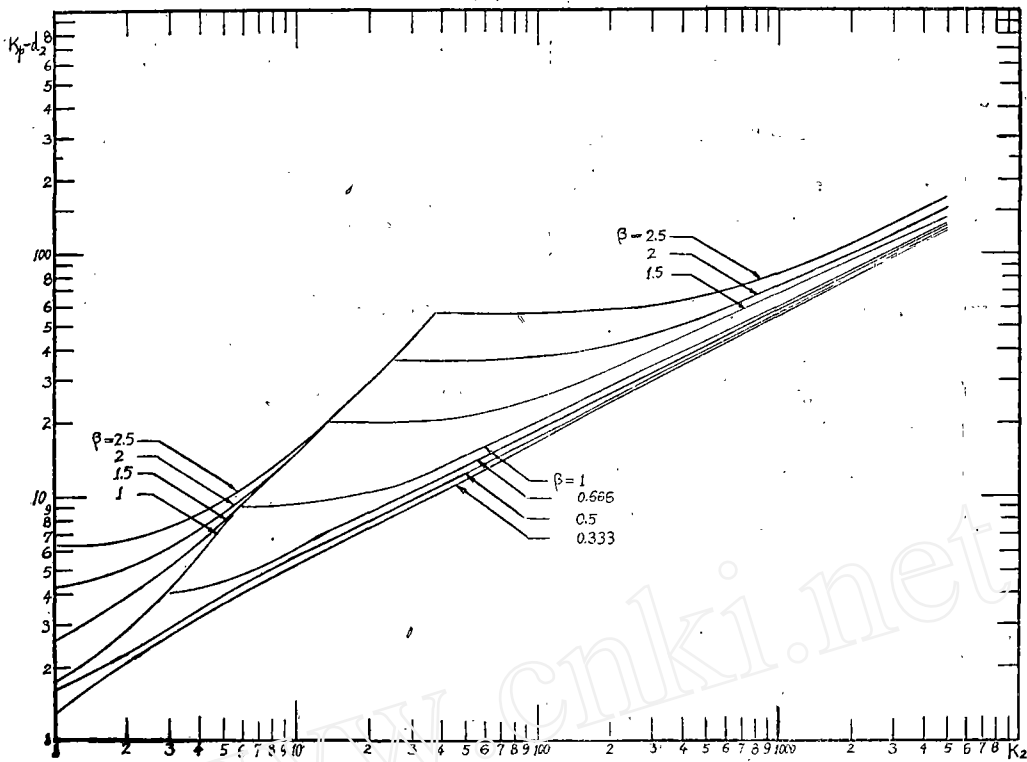


图4 环向加筋曲板临界载荷曲线
(直边顶住筒支边界条件 $d_1 = 0.002, d_2 = 0.004, B_2 = 1.1, f_2 = -3.3, K_4 = 0$)

同样, 对 $K_4 = 0, B_2 = 1.1, 1.3, 1.5, 1.7$ 也可得到与图3类似的曲线, 画出它们的包络线, 并且“砍”掉点划线部分, 最后结果在图4中给出。

与经典筒支边界条件时相同, 给出的是仅有环向加筋的结果。由表1看出, d_1 的影响很小, 所以只给出了 $d_1 = 0.002$ 的 K_p 曲线。

虽然对于 $\beta = 0.33 - 2.5, K_2 = 1 - 5000$ 的计算值全画成图线¹⁾, 但在使用时, 要注意适用范围。根据以往文献及本计算结果给出以下范围: $\beta \leq 1, K_2 \geq 20$; $\beta \leq 1.5, K_2 \geq 100$; $\beta < 2, K_2 \geq 300$ 。在此范围内, 图中曲线可供设计使用时参考。

记 号		
$D_x, D_y, D_{xy}, D_k, B_x, B_y, B_{xy}, C_{xy}, f_x,$ f_{xy}, f_{yx}, f_y	加筋板基本参数	b 曲板的曲边边长
D, B	面板的抗弯、抗拉刚度	l 曲板的直边边长
h	面板的厚度	R 曲板中面的曲率半径
		u, v, w 面板中面上一点在 x, y, z 方向的位移

1) 这里只画出了图3, 4, 其他各图见论文[8]。

ϕ	应力函数		筋的剪切模量
M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}	加筋板截面力矩、扭矩。	A_1, A_2	纵向、横向筋的截面面积
H	$= \frac{1}{2} (M_{xy} + M_{yx})$	I_1, I_2	纵向、横向筋对面板中面切面的惯性矩
N_x, N_{xy}, N_y	加筋板截面力	J_1, J_2	纵向、横向筋横截面的极惯性矩
$\epsilon_x, \epsilon_y, \nu_{xy}$	面板中面应变	e_1, e_2	纵向、横向筋的偏心距
N_x, N_y, N_{xy}	失稳前中面内力	c_1, c_2	纵向、横向筋的间距。
P	均布侧向压力	m, n	纵向、横向半波数
ν	泊桑比		
E, E_1, E_2	面板、纵向筋、横向筋的弹性模数		
G, G_1, G_2	面板、纵向筋、横向		

无量纲参数:

$$d_1 = \frac{D_x}{D_y}, \quad d_2 = 2 \frac{D_{xy} + 2D_x}{D_y}$$

$$B_1 = \frac{B_y}{B_x}, \quad B_2 = B_y \left(\frac{2}{B_{xy}} + \frac{1}{C_{xy}} \right)$$

$$f_1 = \frac{f_{xy}}{f_{yx}}, \quad f_2 = \frac{f_x + f_y}{f_{yx}}$$

$$\beta = \frac{1}{b}, \quad K_2 = \sqrt{\frac{B_y}{D_y}} \frac{1^2}{\pi^2 R}, \quad K_r = \sqrt{\frac{B}{D}} \frac{1^2}{\pi^2 R}$$

$$K_4 = -\sqrt{\frac{B_y}{C_y}} f_{yx},$$

$$K_p = \frac{-N_y^0 l^2}{D_y \pi^2} = \frac{P R l^2}{D_y \pi^2}, \quad \bar{k}_p = \frac{P R l^2}{D_y \pi^2}$$

$$\mu_1 = \frac{E_1 A_1 (1 - \nu_2)}{E h c_1}, \quad \mu_2 = \frac{E_2 A_2 (1 - \nu^2)}{E h c_2}$$

$$\eta_1 = \frac{E_1 \cdot I_1}{D \cdot C_1}, \quad \eta_2 = \frac{E_2 \cdot I_2}{D \cdot C_2}$$

$$\eta_{t1} = \frac{G_1 J_1}{D \cdot C_1}, \quad \eta_{t2} = \frac{G_2 J_2}{D \cdot C_2}$$

$$\chi_1 = \frac{E_1 A_1 e_1 (1 - \nu^2)}{E h C_1} \sqrt{\frac{B}{D}} = \mu_1 e_1 \sqrt{\frac{B}{D}}, \quad \chi_2 = \mu_2 e_2 \sqrt{\frac{B}{D}}$$

参 考 文 献

- (1) Baruch, M., Singer, J., Effect of eccentricity of stiffeners on the general instability of stiffened cylindrical shells under hydrostatic pressure, The Journal of Mechanical Engineering Science, 5 1 (March 1963), 23—27.
- (2) Singer, J., Baruch, M., Harari, O., Inversion of the eccentricity effect in stiffened cylindrical shells (buckling) under external pressure, The Journal of Mechanical Engineering Science, 8, 4 (1966) 363—373
- (3) Singer, J., Baruch, M., Harari, O., On the stability of eccentrically stiffened cylindrical shells under axial compression, International Journal of Solids and Structures, 3, 4 (July 1967), 445—469.
- (4) Simiteses, G. J., General instability of eccentrically stiffened cylindrical panels, J. Aircraft, 8, 7 (1971), 569—575
- (5) Singer, J., Meer, A., Baruch, M., Buckling of cylindrical panels under lateral pressure, Aeronautical J., 73, 698 (1969), 169—172.
- (6) Буштырков, А. А., Применение метода множителей Лагранжа для исследования устойчивости пластин и оболочек, Теория оболочек и пластин, Труды IV Всесоюзной Конференции по Теории Оболочек и Пластин, Ереван (Окт. 1962) 24—31, 285—292.
- (7) 环向离散加筋圆柱曲板的侧压弹性稳定性, 中国科学院力学研究所十二室研究报告 (1972年12月)。
- (8) 加筋圆柱曲板的侧压稳定性, 中国科学院力学研究所研究报告 (1973年3月)。

附录 加筋曲板参数计算公式

将图 5 所示加筋曲板作为正交各向异性曲板处理。加筋曲板截面力, 力矩〔图 5 (b) 给出各内力的正方向〕表达式如下:

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] + \frac{E_1 A_1}{C_1} \varepsilon_x - \frac{E_1 A_1}{c_1} e_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (I-1)$$

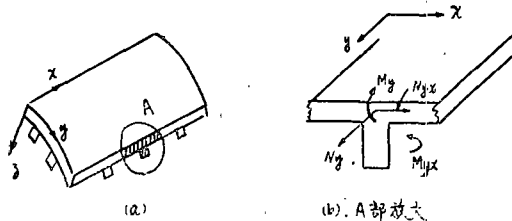


图 5

式中第一项是中面应变在面板内产生的力, 第二项是中面应变在筋条中产生的力, 第三项是中面弯曲在筋条中产生的附加力。

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{E_1 I_1}{C_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{E_1 A_1 e_1}{C_1} \varepsilon_x \quad (I-2)$$

式中第一项是中面弯曲在面板内产生的弯矩，第二项是中面弯曲在筋条中产生的弯矩，第三项是中面应变在筋条中产生的附加弯矩。

同理可以写出 N_y , M_y 的表达式，引入无量纲参数后可以写为：

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_x (1+\mu_1) + \nu\varepsilon_y - \chi_1 \sqrt{\frac{D}{B}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}] \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_y (1+\mu_2) + \nu\varepsilon_x - \chi_2 \sqrt{\frac{D}{B}} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}] \\ M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (1+\eta_1) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \chi_1 \sqrt{\frac{B}{D}} \varepsilon_x \right] \\ M_y &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (1+\eta_2) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \chi_2 \sqrt{\frac{B}{D}} \varepsilon_y \right] \end{aligned} \right\} \quad (I-3)$$

不考虑扭曲和面向剪切偶合作用，剪切力和扭矩可以表达为：

$$\left. \begin{aligned} N_{xy} &= N_{yx} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \nu_{xy} \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{G_1 J_1}{C_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ &= -D [(1-\nu) + \eta_{t1}] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ M_{yx} &= -D [(1-\nu) + \eta_{t2}] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (I-4)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{E_1 A_1 (1-\nu^2)}{EhC_1}, & \mu_2 &= \frac{E_2 A_2 (1-\nu^2)}{EhC_2}, \\ \chi_1 &= \frac{E_1 A_1 e_1 (1-\nu^2)}{EhC_1} \sqrt{\frac{B}{D}} = \mu_1 e_1 \sqrt{\frac{B}{D}}, & \chi_2 &= \mu_2 e_2 \sqrt{\frac{B}{D}}, \\ \eta_1 &= \frac{E_1 I_1}{DC_1}, & \eta_2 &= \frac{E_2 I_2}{DC_2}, \\ \eta_{t1} &= \frac{G_1 J_1}{DC_1}, & \eta_{t2} &= \frac{G_2 J_2}{DC_2} \end{aligned}$$

从式 (I-3) 的前二式中解出 ε_x , ε_y , 得

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - \nu^2} \left\{ \frac{1-\mu^2}{Eh} [(1+\mu_2) N_x - \nu N_y] \right. \\ &\quad \left. + (1+\mu_2) \chi_1 \sqrt{\frac{D}{B}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \chi_2 \sqrt{\frac{D}{B}} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \end{aligned} \quad (I-5)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - \nu^2} \left\{ \frac{1-\nu^2}{Eh} [(1+\mu_1)N_y - \nu N_x] \right. \\ \left. + (1+\mu_1)\chi_2 \sqrt{\frac{D}{B}} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu \chi_1 \sqrt{\frac{D}{B}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\}$$

将式(1-5)的 ε_x , ε_y 代入式(1-3)的后两式, 经过整理可得

$$M_x = -D \left[(1+\eta_1) - \frac{(1+\mu_2)\chi_1^2}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - \nu^2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ - D \left[\nu + \frac{\nu\chi_1\chi_2}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - \nu^2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\chi_1(1+\mu_2)}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - \nu^2} \\ \sqrt{\frac{D}{B}} N_x - \frac{\nu\chi_1}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - \nu^2} \sqrt{\frac{D}{B}} N_y \quad (1-6)$$

$$M_y = -D \left[\nu + \frac{\nu\chi_1\chi_2}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - \nu^2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D(1+\eta_2) \\ - \frac{(1+\mu_1)\chi_2^2}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - \nu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\chi_2(1+\mu_1)}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - \nu^2} \sqrt{\frac{D}{B}} N_y \\ - \frac{\nu\chi_2}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - \nu^2} \sqrt{\frac{D}{B}} N_x$$

由式(1-4)可得

$$\nu_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} N_{xy}, \quad H = \frac{1}{2}(M_{xy} + M_{yx}) \\ = -D \left[(1-\nu) + \frac{\eta_{t1} + \eta_{t2}}{2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1-7)$$

把式(1-5), (1-6)和(1-7)与式(2-2)相比较, 可以得到

$$D_x = D \left[(1+\eta_1) - \frac{(1+\mu_2)\chi_1^2}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - \nu^2} \right], \\ D_y = D \left[(1+\eta_1) - \frac{(1+\mu_1)\chi_2^2}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - \nu^2} \right],$$

$$\begin{aligned}
D_{xy} &= D \left[v + \frac{v\chi_1\chi_2}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - v^2} \right], \\
\frac{1}{B_x} &= \frac{1-v^2}{Eh} \frac{1+\mu_2}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - v^2}, \\
\frac{1}{B_y} &= \frac{1-v^2}{Eh} \frac{1+\mu_1}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - v^2}, \\
\frac{1}{B_{xy}} &= -\frac{1-v^2}{Eh} \frac{v}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - v^2}, \\
f_x &= \frac{1+\mu_2}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - v^2} \sqrt{\frac{D}{B}} \chi_1 \\
&= \frac{1+\mu_2}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - v^2} \mu_1 e_1, \\
f_{yx} &= \frac{-v}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - v^2} \sqrt{\frac{D}{B}} \chi_2' \\
&= \frac{-v}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - v^2} \mu_2 e_2, \\
f_{xy} &= \frac{-v}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - v^2} \sqrt{\frac{D}{B}} \chi_1 \\
&= \frac{-v}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - v^2} \mu_1 e_1, \\
f_y &= \frac{1+\mu_1}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - v^2} \sqrt{\frac{D}{B}} \chi_2 \\
&= \frac{1+\mu_1}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) - v^2} \mu_2 e_2, \\
\frac{1}{C_{xy}} &= \frac{2(1+v)}{Eh}, \\
2D_k &= D \left[(1-v) + \frac{\eta_{t1} + \eta_{t2}}{2} \right]
\end{aligned} \tag{1-8}$$

这样可得到无量纲参数 $d_1, d_2, B_1, B_2, f_1, f_2, K_2, K_4$ 。在只有环向筋的情况下，各参数为：

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{(1+\eta_2) - \frac{(1+\mu_1)\mu_2^2 e_2^2}{(1+\mu_2) - v^2} \frac{B}{D}} \\
&= \frac{1}{(1+\eta_2) - \frac{\mu_2^2}{(1+\mu_2) - v^2} \frac{12e_2^2}{h^2}} \\
&\approx \frac{1}{(1+\eta_2) - 12 \left(\frac{\mu_2 e_2}{h} \right)^2}
\end{aligned}$$

$$d_2 = 2d_1 \left(1 + \frac{\eta_{t1} + \eta_{t2}}{2}\right),$$

$$B_1 = 2 \frac{B_2 - \nu}{1 - \nu},$$

$$B_2 = 1 + \mu_2,$$

$$f_1 = 0,$$

$$f_2 = -3.333,$$

$$K_2 = \sqrt{12d_1[(1 + \mu_2) - \nu^2]} \frac{l^2}{Rh\pi^2},$$

$$K_4 = \sqrt{\frac{12d_1}{(1 + \mu_2) - \nu^2}} \nu \cdot \mu_2 \frac{e_c}{h},$$

$$K_p = \frac{PRl^2}{D\pi^2} d_1$$

(I-9)

下面举一个例子说明论文[8]中图五—图八曲线的用法。面板为 $l = b = R = 560$ 毫米, $h = 1.2$ 毫米的铝板, 上面加三根型号为 IIP100No1 的铝制筋条。

由手册查得: $A = 23.4$ 毫米³, $I = 320$ 毫米⁴, $\chi_0 = 3.31$ 毫米,

$$C_2 = \frac{500}{3} = 166.6 \text{ 毫米}, \quad e_2 = \frac{h}{2} + \chi_0 = 3.91 \text{ 毫米},$$

$$\mu_2 = \frac{A(1 - \nu^2)}{hC_2} = 0.1065,$$

$$\eta_2 = \frac{I + Ae^2}{C_2 h^3 / [12(1 - \nu^2)]} = 25.7$$

由式 (I-9) 可得

$$d_1 = 0.0396,$$

$$d_2 = 2d_1 = 0.0792 \text{ (忽略筋条抗扭刚度)},$$

$$B_1 = 2.304,$$

$$B_2 = 1.1065,$$

$$K_2 = 29.34,$$

$$K_4 = -0.07,$$

$$\beta = 1$$

由论文[8]图五查得 $K_p = 9$, 所以

$$P_{cr} = \frac{K_p \pi^2 D}{d_1 l^2 R} = 2.044 \text{ 公斤/厘米}^2$$

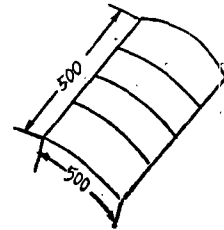


图 6