



## 破甲过程初步分析及一些基础知识(續)

中国科学院力学研究所二室四组\*

### 三、基本方程的推导

上面介绍了材料的物态方程,包括静水压和体积变化、温度变化之间的关系以及应力偏量和弹性变形之间的关系。

描写破甲过程,除了需要知道弹和板的材料的物态方程以外,最基本的方程还是三个守恒方程,即:质量守恒、动量守恒和能量守恒。

由于我们的问题是轴对称的,所以取柱坐标最为方便,下面分别给出欧拉坐标的三个守恒方程的表示式。

本节的最后,还给出波阵面(冲击波、弹性波、塑性波)前后物理量之间的关系式。

#### 符 号 表

$r$ : 径向欧拉坐标	$p$ : 压力或负的平均正应力
$z$ : 轴向欧拉坐标	$s_r$ : 径向应力偏量
$\theta$ : 环向欧拉坐标	$s_x$ : 轴向应力偏量
$t$ : 时间	$s_\theta$ : 环向应力偏量
$u$ : 径向质点速度	$\dot{\epsilon}_r$ : 径向拉应变率
$v$ : 轴向质点速度	$\dot{\epsilon}_x$ : 轴向拉应变率
$\sigma_r$ : 径向正应力	$\dot{\epsilon}_\theta$ : 环向拉应变率
$\sigma_x$ : 轴向正应力	$\gamma$ : 径向或轴向角应变率
$\sigma_\theta$ : 环向正应力	$\dot{\epsilon}_r$ : 径向应变率偏量
$\tau$ : 径向或轴向切应力	$\dot{\epsilon}_x$ : 轴向应变率偏量
$\rho$ : 密度	$\dot{\epsilon}_\theta$ : 环向应变率偏量
$V$ : 比容 ( $=\frac{1}{\rho}$ )	$\Omega$ : 角速度
$E$ : 比内能	$E_V$ : 体积内能
$E_s$ : 弹性畸变内能	$T$ : 绝对温度
$G$ : 弹性剪切模量	$Y$ : 屈服强度
$\lambda$ : 增量关系中的比例系数	

#### §1 质量守恒方程——连续性方程

取一个柱坐标系里的小单元六面体,它是由六个空间面所割出,其中两个面是垂直于 $z$

\* 本文主要根据郑哲敏的讲稿整理而成,参加工作的尚有段祝平、谈庆明、刘小莘等。

轴的平面 $z$ 面和 $z+dz$ 面；两个面是半径为 $r$ 和 $r+dr$ 的圆柱面；两个面是极角为 $\theta$ 和 $\theta+d\theta$ 的子午面。

在时间 $t$ 到 $t+\Delta t$ 这段时间间隔里，通过六面体的六个表面而流进体内的物质总质量，根据物质不灭定律，应该等于 $dt$ 间隔内六面体所占据的空间体积里所增加的物质质量。于是，对六面体而言：

通过子午面 $\theta$ 面及 $\theta+d\theta$ 面没有质量流过

通过 $r$ 面，有质量流入，等于 $\rho u d t r d \theta d z$

通过 $r+dr$ 面，有质量流出，等于 $(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial r} d r) d t (r+dr) d \theta d z$

通过 $z$ 面，有质量流入，等于 $\rho v d t r d \theta d r$ ；

通过 $z+dz$ 面，有质量流出，等于 $(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial z} d z) d t r d \theta d r$

在 $dt$ 间隔内，六面体内所增加的质量等于 $\frac{\partial}{\partial t}(\rho r d \theta d z d r) d t$

因此，应有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho r d \theta d z d r) d t &= \rho u d t r d \theta d z - (\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial r} d r) d t (r+dr) d \theta d z + \\ &+ \rho v d t r d \theta d r - (\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial z} d z) d t r d \theta d r \end{aligned}$$

展开后得到

$$\begin{aligned} r \frac{\partial \rho}{\partial t} d \theta d z d r d t &= \rho u d t r d \theta d z - \rho u d t r d \theta d z - r \frac{\partial \rho u}{\partial r} d r d t d \theta d z - \\ &- \rho u d t d r d \theta d z - \frac{\partial \rho u}{\partial r} d t d r^2 d \theta d z + \rho v d t r d \theta d r - \\ &- \rho v d t r d \theta d r - r \frac{\partial \rho v}{\partial z} d t d z d \theta d r \end{aligned}$$

消去同类项，忽略高阶小量，并由于选择 $d\theta$ ， $dz$ ， $dr$ ， $dt$ 均有任意性，得到

$$r \frac{\partial \rho}{\partial t} = -r \frac{\partial \rho u}{\partial r} - \rho u - r \frac{\partial \rho v}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho u r)}{\partial r} - r \frac{\partial(\rho v)}{\partial z}$$

即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} = 0 \quad (\text{质 1})$$

如果将微商拆开以后重新组合，可得

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + v \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0$$

即

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (\text{质 2})$$

在上式中,  $\frac{d\rho}{dt}$  称为密度的物质微商, 它区别于  $r$  和  $z$  固定不变而仅对  $t$  求导数的  $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ 。

$\frac{d\rho}{dt}$  的物理意义乃是单位时间内某一物质微团运动时所产生的密度  $\rho$  的变化值。如果在  $t$  时刻, 该物质微团处在  $(r, z)$  的位置, 由于它有速度  $(u, v)$ , 于是在  $t + \Delta t$  时刻, 它走到了  $(r + u\Delta t, z + v\Delta t)$  的位置。

按照定义, 应该有

$$\frac{d\rho(r, z, t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(r + u\Delta t, z + v\Delta t, t + \Delta t) - \rho(r, z, t)}{\Delta t}$$

展开成泰勒级数, 并略去高阶小量, 有

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(r, z, t) + \frac{\partial\rho}{\partial r}u\Delta t + \frac{\partial\rho}{\partial z}v\Delta t + \frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta t + \dots - \rho(r, z, t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial r} + v\frac{\partial\rho}{\partial z} + \dots \right] \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial r} + v\frac{\partial\rho}{\partial z} \end{aligned}$$

同样, 对于任意一个函数  $f(r, z, t)$ , 总会有

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left( u\frac{\partial f}{\partial r} + v\frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

等式右面的  $\frac{\partial f}{\partial t}$  称为局部微商, 它只是时间发生变化而位置不变所产生, 在定常运动中,

$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , 后面括号中的两项称为迁移微商, 它们是因为物质具有速度, 其位置随时间而变所产生, 如果  $f$  是均匀分布的, 则括号中的量等于零。

如果用比容来表示连续性方程, 则因  $\rho = \frac{1}{V}$ , 有

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{V^2} \frac{dV}{dt}$$

故

$$-\frac{1}{V^2} \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

即

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{质 3})$$

## § 2 动量守恒方程——运动方程

仍然取上面的小单元六面体, 并考察在时间  $t$  到  $t + dt$  间隔里它的动量的变化情况。由于

这里不考虑体力对它的作用，那么，它的动量之所以发生变化，无非是由于作用在六个表面上的面力及流经这六个表面上的动量。图 3-1 是作用于各面上的应力示意图。

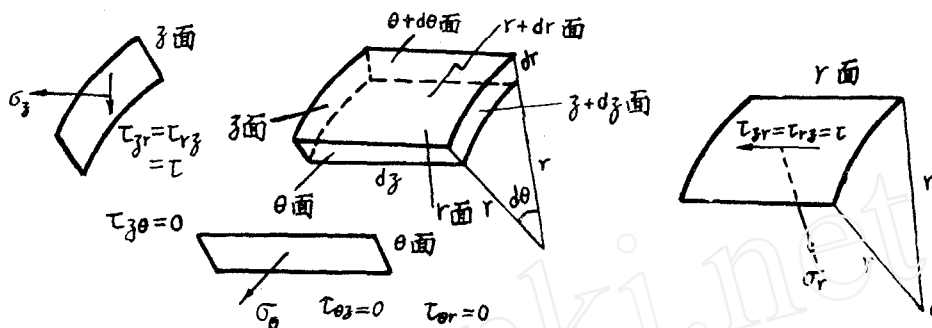


图 3-1

由于问题具有轴对称的性质，每一个质点均在其所在的子午面内运动，而且六面体在  $z$  面上的小长方体以及在  $r$  面上的小长方体，在运动过程中始终都保持矩形的形状，即其四个角不发生角应变，因此  $\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = 0$ ， $\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} = 0$ ，只有在子午面上小长方体的四个角才存在角应变，因而存在切应力  $\tau_{zr} = \tau_{rz} = \tau$ 。于是柱坐标的六面体微元上的应力状态可以由下面的矩阵来描写：

$$\begin{pmatrix} \sigma_r & \tau & 0 \\ \tau & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta \end{pmatrix}$$

先看在  $dt$  间隔内  $z$  方向上的动量变化和各个面元上面力的冲量：

通过子午面  $\theta$  面及  $\theta + d\theta$  面，没有动量流过

通过  $r$  面，有  $z$  方向的动量流入，等于  $v\rho u dt r d\theta dz$

通过  $r + dr$  面，有  $z$  方向的动量流出，等于  $(v\rho u r + \frac{\partial v\rho u r}{\partial r} dr) dt d\theta dz$

通过  $z$  面，有  $z$  方向的动量流入，等于  $v\rho v dt r d\theta dr$ ；

通过  $z + dz$  面，有  $z$  方向的动量流出，等于  $(\rho v^2 + \frac{\partial \rho v^2}{\partial z} dz) dt r d\theta dr$

在  $dt$  间隔内，六面体所增加的  $z$  方向的动量等于  $\frac{\partial}{\partial t} (v\rho r d\theta dz dr) dt$

作用于  $\theta$  及  $\theta + d\theta$  面上  $z$  方向的冲量为零

作用于  $r$  面上  $z$  方向的冲量等于  $-\tau r d\theta dz dt$

作用于  $r + dr$  面上  $z$  方向的冲量等于  $(\tau r + \frac{\partial \tau r}{\partial r} dr) d\theta dz dt$

作用于  $z$  面上  $z$  方向的冲量等于  $-\sigma_z r d\theta dr dt$

作用于  $z + dz$  面上  $z$  方向的冲量等于  $(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz) r d\theta dr dt$

根据动量守恒定律，六面体所增加的动量应该等于通过各面流进去的动量加上作用于各面上的冲量，即

$$\frac{\partial}{\partial t} (v\rho r d\theta dz dr) dt = v\rho u dt r d\theta dz - (v\rho u r + \frac{\partial v\rho u r}{\partial r} dr) dt d\theta dz +$$

$$\begin{aligned}
 & +v\rho v dt r d\theta dr - \left( \rho v^2 + \frac{\partial \rho v^2}{\partial z} dz \right) dt r d\theta dr - \\
 & -\tau r d\theta dz dt + \left( \tau r + \frac{\partial \tau r}{\partial r} dr \right) d\theta dz dt - \\
 & -\sigma_z r d\theta dr dt + \left( \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) r d\theta dr dt
 \end{aligned}$$

消去同类项，并由于 $d\theta$ ,  $dz$ ,  $dr$ ,  $dt$ 的选择具有任意性，上式化简为

$$\begin{aligned}
 r \frac{\partial \rho v}{\partial t} &= -\frac{\partial r \rho v}{\partial r} - r \frac{\partial \rho v^2}{\partial z} + \frac{\partial \tau r}{\partial r} + r \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \\
 &= -r \rho v \frac{\partial u}{\partial r} - \rho u r - r v \frac{\partial \rho v}{\partial r} - r v \frac{\partial \rho v}{\partial z} - r \rho v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \tau r}{\partial r} + r \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}
 \end{aligned}$$

上式用 $r$ 除一下，并移项，得到

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + u \frac{\partial \rho v}{\partial r} + v \frac{\partial \rho v}{\partial z} = -\rho v \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

等式左面等于 
$$\rho \frac{dv}{dt} = v \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dv}{dt}$$

但是由于有连续方程 
$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

所以最后可得 $z$ 方向的动量守恒方程为

$$\rho \frac{dv}{dt} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} \quad (\text{动}1_z)$$

推导 $r$ 方向的动量守恒方程的过程是类似的，不同之处是作用于 $\theta$ 面和 $\theta+d\theta$ 面上的环向正应力对 $r$ 方向的冲量有贡献，各为 $-\sigma_\theta dr dz \frac{1}{2} d\theta dt$ 及 $-\left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta\right) dr dz \frac{1}{2} d\theta dt$ ，忽略高阶小量，二者的合冲量为 $-\sigma_\theta dr dz d\theta dt$ 。于是，可以得出 $r$ 方向的动量守恒方程为

$$\rho \frac{du}{dt} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \quad (\text{动}1_r)$$

将上述 $r$ 方向和 $z$ 方向的动量方程各乘上 $u$ 及 $v$ 再相加，可以得到一个很有用的能量公式：

$$\rho u \frac{du}{dt} + \rho v \frac{dv}{dt} = u \left( \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \right) + v \left( \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} \right)$$

即 
$$\rho \frac{d\left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right)}{dt} = u \left( \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \right) + v \left( \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} \right) \quad (\text{动}2)$$

等式左边括号内的 $\frac{u^2 + v^2}{2}$ 乃是单位质量的动能，而等式右边括号内就是动量守恒方程中作用于六面体表面上的不平衡的力，各乘上同方向的速度乃是单位时间内不平衡的面力对单位体积的六面体所作的功，如果被密度 $\rho$ 除一下，则就是对单位质量的六面体所作的功。所以上述能量公式的物理意义就是，一个微团的动能变化率，等于微团表面上不平衡力推动微团运

动时所作的功率。如果微团表面上的面力是平衡的，那末微团将作等速运动，当然动能就保持不变。

### §3 能量守恒方程

破甲过程经历时间很短，物质状态变化很快，热传导的现象并不显著，可以不予考虑。在没有热交换的条件下，对于一个可逆的热力学过程，系统所增加的内能就等于环境对系统所作的功。但是，如果有塑性变形，这个过程就不是可逆的了。

对于具有流体、弹塑性性质的物质，它的内能 $E$ 可写成比容 $V$ ，温度 $T$ ，弹性应变偏量 $\gamma_{ij}$ 的函数。 $E$ 总可以分为两部分：一部分和体积变化有关，也和温度有关，这部分相当于气体的内能，称为 $E_v(V, T)$ ；另一部分是和形状变化（畸变）有关的弹性畸变能 $E_s$ 。我们假设这两部分内能之间是没有耦合的，因此有

$$\begin{aligned} E &= E(V, T, \gamma_{ij}^e) \\ &= E_v(V, T) + E_s(\gamma_{ij}^e) \end{aligned}$$

其中 $\gamma_{ij}^e$ 是弹性应变偏量张量，在这里就是

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_r^e & \gamma^e & 0 \\ \gamma^e & \varepsilon_z^e & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\theta^e \end{pmatrix}$$

单位质量物质的总能量（内能加动能）等于  $E + \frac{u^2 + v^2}{2}$

考察在时间 $t$ 到 $t + dt$ 这段时间间隔内，单元六面体内所发生的能量变化和外力对单元体所作的功：

通过子午面 $\theta$ 及 $\theta + d\theta$ 面，没有能量流过

通过 $r$ 面所流入的总能量等于  $\rho \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) u dt r d\theta dz$

通过 $r + dr$ 面所流出的总能量等于

$$\left[ \rho u r \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \frac{\partial \rho u r \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)}{\partial r} dr \right] dt d\theta dz$$

通过 $z$ 面所流入的总能量等于  $\rho \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) v dt r d\theta dr$

通过 $z + dz$ 面所流出的总能量等于

$$\left[ \rho v r \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \frac{\partial \rho v r \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)}{\partial z} dz \right] dt d\theta dr$$

作用在 $r$ 面上的外力所作的功等于  $(-u dt \sigma_r - v dt \tau) r d\theta dz$

作用在 $r + dr$ 面上的外力所作的功等于

$$\left[ r(u \sigma_r + v \tau) + \frac{\partial r(u \sigma_r + v \tau)}{\partial r} dr \right] dt d\theta dz$$

作用在 $z$ 面上的外力所作的功等于  $(-v dt \sigma_z - u dt \tau) r d\theta dr$

作用在 $z+dz$ 面上的外力所作的功等于

$$\left[ r(v\sigma_z + u\tau) + \frac{\partial r(v\sigma_z + u\tau)}{\partial z} dz \right] dt d\theta dr$$

作用在子午面 $\theta$ 及 $\theta+d\theta$ 面上的外力并不做功

在 $dt$ 间隔内, 六面体内所增加的总能量等于

$$\frac{\partial \rho \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) r d\theta dr dz}{\partial t} dt$$

根据能量守恒定律, 六面体内所增加的总能量应该等于通过各面流进去的能量加上各面上的外力所作的功, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) r d\theta dr dz}{\partial t} dt = & \rho \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) u dt r d\theta dz - \left[ \rho u r \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \rho u r \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)}{\partial r} dr \right] dt d\theta dz + \rho \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) v dt r d\theta dr - \\ & - \left[ \rho v r \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \frac{\partial \rho v r \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)}{\partial z} dz \right] dt d\theta dr + \\ & + (-u dt \sigma_r - v dt \tau) r d\theta dz + \left[ r(u\sigma_r + v\tau) + \frac{\partial r(u\sigma_r + v\tau)}{\partial r} dr \right] dt d\theta dz + \\ & + (-v dt \sigma_z - u dt \tau) r d\theta dr + \\ & + \left[ r(v\sigma_r + u\tau) + \frac{\partial r(v\sigma_r + u\tau)}{\partial z} dz \right] dt d\theta dr \end{aligned}$$

消去同类项, 并由于 $d\theta$ ,  $dz$ ,  $dr$ ,  $dt$ 的选择具有任意性, 上式化简为

$$\begin{aligned} r \frac{\partial \rho \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)}{\partial t} = & - \frac{\partial \rho u r \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)}{\partial r} - \frac{\partial \rho v r \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial r(u\sigma_r + v\tau)}{\partial r} + \frac{\partial r(v\sigma_z + u\tau)}{\partial z} \end{aligned}$$

展开后得到

$$\begin{aligned} r \rho \frac{\partial \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)}{\partial t} + r \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = & - r \rho u \frac{\partial \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)}{\partial r} - \\ & - r \rho v \frac{\partial \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)}{\partial z} - \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \frac{\partial (\rho u r)}{\partial r} - \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \frac{\partial (\rho v r)}{\partial z} + \end{aligned}$$

$$+ u \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + r \sigma_r \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial \tau}{\partial r} + \tau r \frac{\partial v}{\partial r} + r v \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \sigma_z \frac{\partial r v}{\partial z} + r u \frac{\partial \tau}{\partial z} + \tau \frac{\partial r u}{\partial z}$$

全式被 $r$ 除一下，式中带直线的可以用质量守恒方程（质1）消掉，带曲线的三项可化为物质微商的形式，于是得到

$$\rho \frac{d\left(E + \frac{u^2 + v^2}{2}\right)}{dt} = u \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \right) + v \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} \right) + \sigma_r \frac{\partial u}{\partial r} + \sigma_z \frac{\partial v}{\partial z} + \tau \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (\text{能1})$$

注意到动量守恒的能量公式（动2），上式又可化为

$$\rho \frac{dE}{dt} = \sigma_r \frac{\partial u}{\partial r} + \sigma_z \frac{\partial v}{\partial z} + \tau \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \sigma_\theta \frac{u}{r} \quad (\text{能2})$$

可以看到，等式的右边代表单位时间内单位体积物质的变形功。所以从物理上看，等式就是无热交换情况下的热力学第一定律的表示。也可以理解为，跟随着物质运动，物质的内能改变就等于外力对它所作的变形功。一般来说，讨论定常过程中流线上的变化，用（能1）形式比较方便；讨论热力学关系时，用（能2）形式比较方便。

为了进行破甲过程的分析，还要把能量方程化成一种便于使用的形式。我们需要把应力化为压力和应力偏量的形式，把应变率化为比容变化率和弹、塑性应变率偏量的形式，还要利用弹性虎克定律以及塑性增量理论。下面先列出要用到的一些关系式（其中凡是在函数符号上方有圆点的，均表示该函数的物质微商）：

$$\text{应力: } \begin{cases} \sigma_r = s_r - p \\ \sigma_z = s_z - p \\ \sigma_\theta = s_\theta - p \\ \tau = \tau \end{cases}$$

$$p = -\frac{1}{3} (\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta)$$

$$s_r + s_z + s_\theta = 0$$

$$\text{应变率: } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \dot{e}_r = \dot{\epsilon}_r + \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} = \dot{\epsilon}_r^e + \dot{\epsilon}_r^p + \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \\ \frac{\partial v}{\partial z} = \dot{e}_z = \dot{\epsilon}_z + \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} = \dot{\epsilon}_z^e + \dot{\epsilon}_z^p + \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \\ \frac{u}{r} = \dot{e}_\theta = \dot{\epsilon}_\theta + \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} = \dot{\epsilon}_\theta^e + \dot{\epsilon}_\theta^p + \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \\ \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = 2\dot{\gamma} = 2(\dot{\gamma}^e + \dot{\gamma}^p) \end{cases}$$



$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} = \dot{e}_r + \dot{e}_z + \dot{e}_\theta = \frac{\dot{V}}{V}$$

$$\dot{e}_r + \dot{e}_z + \dot{e}_\theta = 0$$

$$\dot{e}_r^e + \dot{e}_z^e + \dot{e}_\theta^e = 0, \quad \dot{e}_r^p + \dot{e}_z^p + \dot{e}_\theta^p = 0$$

$$\text{虎克定律: } \left\{ \begin{array}{l} \dot{s}_r = 2G\dot{e}_r^e + 2\tau\Omega \\ \dot{s}_z = 2G\dot{e}_z^e - 2\tau\Omega \\ \dot{s}_\theta = 2G\dot{e}_\theta^e \end{array} \right.$$

$$\dot{s}_z = 2G\dot{e}_z^e - 2\tau\Omega$$

$$\dot{s}_\theta = 2G\dot{e}_\theta^e$$

$$\dot{\tau} = 2G\dot{\gamma}^p - (s_r - s_z)\Omega$$

塑性增量理论:

$$\dot{e}_r^p = \lambda s_r$$

$$\dot{e}_z^p = \lambda s_z$$

$$\dot{e}_\theta^p = \lambda s_\theta$$

$$\dot{\gamma}^p = \lambda \tau$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\dot{e}_r^p{}^2 + \dot{e}_z^p{}^2 + \dot{e}_\theta^p{}^2 + 2\dot{\gamma}^p{}^2)^{\frac{1}{2}}}{Y}$$

这里对虎克定律的形式作一些说明。考察子午面上的一个单元小方块，其边平行于  $r$  轴与  $z$  轴（图3-2）。如果在  $t$  时刻，占据这个单元小方块的物质，在  $t + \Delta t$  时刻运动到新的位置，那么各边的伸长及夹角的缩小就决定了应变率，而各边又转了一个角度  $\Omega \Delta t$  ( $\Omega$  是  $rz$  面上的角速度)。在  $t + \Delta t$  时刻作用于这物质元的边上的应力偏量如果仍用  $r$  与  $z$  方向的应力偏量来表示，则应有所修正，这将取决于角速度  $\Omega$ 。根据连续介质力学的知识，可知角速度

$$\Omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

根据物质微商的定义，应有

$$\dot{s}_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s_z^{n+1} - s_z^n}{\Delta t}$$

其中  $s_z^{n+1}$ ,  $s_z^n$  各表示物质元在  $t + \Delta t$  及  $t$  时刻的  $z$  向应力偏量。如果将它分为下面两部分：

$$\dot{s}_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s_z^{n+1} - s_z^{*n+1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s_z^{*n+1} - s_z^n}{\Delta t}$$

(其中  $s_z^{*n+1}$  的定义是这样的：如在时刻  $t$  占据单元小方块的物质元在平行于  $r$  轴的边上受到

的正应力偏量是  $s_z^*$ ，则到了时刻  $t + \Delta t$ ，这个物质元的四边已经旋转了一个角度  $\Omega \Delta t$ ，在这时作用于边上的正应力偏量记为  $s_z^{*n+1}$  及  $s_r^{*n+1}$ ，见图 3-3），那末第二部分就是由弹性应变率所引起的部分，忽略高阶小量，它等于  $2G\dot{\epsilon}_z^e$ ；第一部分则仅仅和作用于斜边（倾角是  $\Omega \Delta t$ ）上的正应力偏量和  $z$  方向上的正应力偏量之差有关，要计算这个差值，可以在图 3-3 上取一个直角三角形，求作用在这三角形上的力的平衡，这应该有

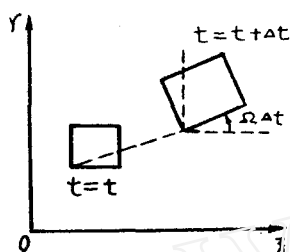


图 3-2

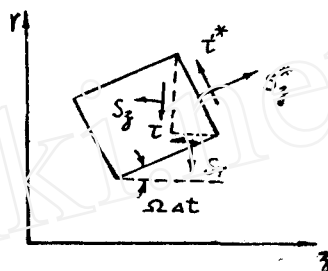


图 3-3

$$\begin{cases} s_z^* \cos \Omega \Delta t - \tau^* \sin \Omega \Delta t = s_z \cos \Omega \Delta t + \tau \sin \Omega \Delta t \\ s_z^* \sin \Omega \Delta t + \tau^* \cos \Omega \Delta t = \tau \cos \Omega \Delta t + s_r \sin \Omega \Delta t \end{cases}$$

可联立求出

$$\begin{cases} s_z^* = s_r \sin^2 \Omega \Delta t + s_z \cos^2 \Omega \Delta t + 2\tau \sin \Omega \Delta t \cos \Omega \Delta t \\ \tau^* = \tau (\cos^2 \Omega \Delta t - \sin^2 \Omega \Delta t) + (s_r - s_z) \sin \Omega \Delta t \cos \Omega \Delta t \end{cases}$$

因此有

$$s_z^{n+1} - s_z^{*n+1} = s_z (1 - \cos^2 \Omega \Delta t) - s_r \sin^2 \Omega \Delta t - 2\tau \sin \Omega \Delta t \cos \Omega \Delta t$$

及

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s_z^{n+1} - s_z^{*n+1}}{\Delta t} = -2\tau\Omega$$

同样可以求得

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\tau^{n+1} - \tau^{*n+1}}{\Delta t} = -(s_r - s_z)\Omega$$

及

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s_r^{n+1} - s_r^{*n+1}}{\Delta t} = 2\tau\Omega$$

于是，前面计算  $\dot{s}_z$  的公式就可化为

$$\begin{aligned} \dot{s}_z &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s_z^{n+1} - s_z^{*n+1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s_z^{*n+1} - s_z^n}{\Delta t} \\ &= -2\tau\Omega + 2G\dot{\epsilon}_z^e \end{aligned}$$

同样有

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= 2G\dot{\gamma}^e - (s_r - s_z)\Omega \\ \dot{s}_r &= 2G\dot{\epsilon}_r^e + 2\tau\Omega \end{aligned}$$

由于在 $\theta$ 方向没有旋转, 所以直接就有

$$s_{\theta} = 2G\varepsilon_{\theta}^e$$

把前面所列出的一系列关系式用到(能2)公式中去, 并注意到弹性畸变能是可逆能, 而内能 $E$ 可分为体积变化能 $E_V$ 和弹性畸变能 $E_S$ 两部分:

$$E = E_V + E_S$$

$$dE_S = \frac{1}{\rho} (s_r + d\varepsilon_r^e + s_z d\varepsilon_z^e + s_{\theta} d\varepsilon_{\theta}^e + 2\tau d\gamma^e)$$

即可把能量方程化为

$$\frac{dE_V}{dt} = -p \frac{dV}{dt} + V \left( s_r \frac{d\varepsilon_r^e}{dt} + s_z \frac{d\varepsilon_z^e}{dt} + s_{\theta} \frac{d\varepsilon_{\theta}^e}{dt} + 2\tau \frac{d\gamma^e}{dt} \right) \quad (\text{能3})$$

若把前面所列出的一系列关系式用到(能1)公式中去, 则能量方程可化为

$$\begin{aligned} \rho \frac{d \left( E + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)}{dt} = & -u \frac{\partial p}{\partial r} - v \frac{\partial p}{\partial z} - p \frac{\dot{V}}{V} + (s_r \dot{\varepsilon}_r^e + s_z \dot{\varepsilon}_z^e + s_{\theta} \dot{\varepsilon}_{\theta}^e + 2\tau \dot{\gamma}^e) + \\ & + \sqrt{\frac{2}{3}} Y \left[ \dot{\varepsilon}_r^{p2} + \dot{\varepsilon}_z^{p2} + \dot{\varepsilon}_{\theta}^{p2} + 2\dot{\gamma}^{p2} \right]^{\frac{1}{2}} + u \frac{\partial s_r}{\partial r} + v \frac{\partial s_z}{\partial z} + \frac{(s_r - s_{\theta})}{r} u + \\ & + \frac{v}{r} \frac{\partial(\tau r)}{\partial r} + u \frac{\partial \tau}{\partial z} \end{aligned}$$

等式右面的头两项乃是不平衡的压力对运动着的微团所作的功, 第三项是关于微团体积膨胀部分压力所作的功, 第四项是关于微团弹性畸变部分应力偏量所作的功, 第五项是关于微团塑性畸变部分应力偏量所作的功, 其余五项则是不平衡的应力偏量对运动着的微团所作的功。

再把等式右边前三项有关 $p$ 的项改写一下:

$$\begin{aligned} -u \frac{\partial p}{\partial r} - v \frac{\partial p}{\partial z} - p \frac{\dot{V}}{V} = & -\frac{dp}{dt} + \frac{\partial p}{\partial t} - p\rho \left( -\frac{1}{\rho^2} \right) \frac{d\rho}{dt} \\ = & -\frac{dp}{dt} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho \frac{d \left( \frac{p}{\rho} \right)}{dt} + \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned}$$

于是得到后面要使用的能量方程形式:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left( E_V + \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = & \frac{\partial p}{\partial t} + \sqrt{\frac{2}{3}} Y \left[ \dot{\varepsilon}_r^{p2} + \dot{\varepsilon}_z^{p2} + \dot{\varepsilon}_{\theta}^{p2} + 2\dot{\gamma}^{p2} \right] + u \frac{\partial s_r}{\partial r} + \\ & + v \frac{\partial s_z}{\partial z} + (s_r - s_{\theta}) \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \frac{\partial(\tau r)}{\partial r} + u \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (\text{能4}) \end{aligned}$$

#### §4 波阵面前后物理量之间的关系——兰金—雨果尼奥关系

##### (1) 一般关系式

不论是击波还是弹塑性波, 不论是在波阵面上发生连续变化还是突跃变化, 波阵面的运动总要遵循质量、动量、能量这三个守恒定律。和材料的状态方程相联系, 可以导出波阵面前后物理量之间的关系, 称之为兰金—雨果尼奥(Rankine-Hugoniot)关系。

这里只讨论垂直波阵面方向上有物理量变化，即波阵面的传播速度和波前、波后的质点速度方向相同的情况。

假设波阵面的传播速度为 $U$ ，波前和波后的物理量各用下标0和1来表示，并在本节中规定正应力以压为正（图3-4）：

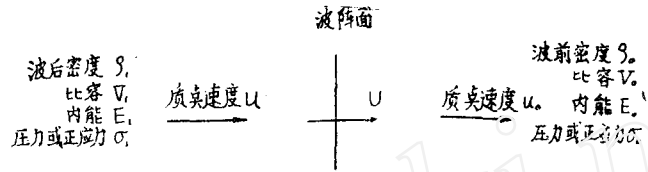


图 3-4

质量守恒：

令 $m$ 为质量流率，即在单位时间内单位面积的波阵面所扫过的材料的质量，则按照波前的量计算，应该有

$$m = \rho_0(U - u_0)$$

若按照波后的量计算，则有

$$m = \rho_1(U - u_1)$$

因此有

$$m = \rho_0(U - u_0) = \rho_1(U - u_1) \quad (3-1)$$

动量守恒：

波阵面扫过质量 $m$ 时，材料的动量所发生的变化应该等于这段时间内波阵面前后应力差的冲量，由于取的是单位时间，所以冲量的数值就等于应力差，即

$$\sigma_1 - \sigma_0 = m(u_1 - u_0) \quad (3-2)$$

能量守恒：

波阵面扫过质量 $m$ 时，材料的总能量所发生的变化应该等于波阵面前后应力差在单位时间内所作的功，即

$$\sigma_1 u_1 - \sigma_0 u_0 = m \left[ \left( E_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right) - \left( E_0 + \frac{1}{2} u_0^2 \right) \right] \quad (3-3)$$

因此，由上面三式，在波阵面前后内能的变化值为

$$\Delta E = E_1 - E_0 = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_0) (V_0 - V_1) \quad (3-4)$$

如果已知材料的状态方程 $E = E(\sigma, V)$ ，则式(3-4)表示的是在波阵面上正应力和比容之间的关系，通常称之为兰金-雨果尼奥关系。

把式(3-1)和(3-2)重新组合以后，可以得到波阵面的相对速度：

$$(U - u_0)^2 = V_0^2 \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{V_0 - V_1} \quad (3-5)$$

$$(U - u_1)^2 = V_1^2 \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{V_0 - V_1} \quad (3-6)$$

在许多情况下，波前的材料往往是静止的，而且 $\sigma_0$ 和 $\sigma_1$ 相比可以忽略不计。在这种情况下，上面的公式可以化简为

$$\sigma_1 = \rho_0 U u_1 \quad (3-7)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{U}{U - u_1} \quad (3-8)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \sigma_1 (V_0 - V_1) = \frac{1}{2} u_1^2 \quad (3-9)$$

上述关系也就是击波阵面上的关系式。对于弹性波和塑性波来说，再利用塑性虎克定律和屈服条件，可以导出更为具体一些的关系式。

(2) 在状态平面上的击波关系曲线

在实际使用中，常常利用曲线或表格的形式。譬如常常要用击波阵面前后正应力的变化和速度的变化之间的关系，把它画到纵坐标为正应力、横坐标为速度的平面上去所得到的曲线便称为 $\sigma-u$ 状态平面上的击波极曲线。

根据上面给出的三个守恒关系以及已知物质的状态方程，再适当改写一下，可得

$$\text{质: } \rho_0 (U - u_0) = \rho_1 [(U - u_0) - (u_1 - u_0)] = m$$

$$\text{动: } \sigma_1 - \sigma_0 = m(u_1 - u_0)$$

$$\text{能: } E_1 - E_0 = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_0) \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right)$$

$$\text{状: } E_1 = E_1(\sigma_1, \rho_1)$$

可以看出，若给定击波前的状态 $\rho_0, \sigma_0, E_0$ 和 $u_0$ ，要解出击波速度以及击波后的状态 $\rho_1, \sigma_1, E_1$ 和 $u_1$ ，一共有五个未知量，但只有四个方程，只能得到两个未知量之间的关系。所以波后应力可以表示为波后速度的确定的函数关系：

$$\sigma_1 = f(u_1; \rho_0, \sigma_0, E_0, u_0)$$

或者，从方程可以看出，总可以写成相对速度 $u_1 - u_0, U - u_0$ 的形式，于是有波后应力与前后速度差之间的确定的关系：

$$\sigma_1 = g(u_1 - u_0; \rho_0, \sigma_0, E_0)$$

对于确定的材料，在 $\sigma_1 - u_1$ 图上的击波极曲线大概有图 3-5 所示的形状。

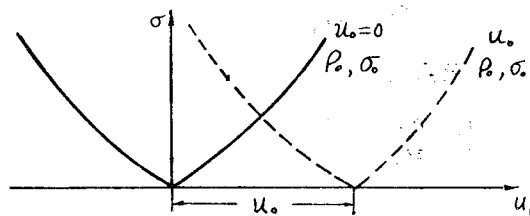


图 3-5

这里要说明两点：第一，图上的实线代表波前的材料是静止的情况。曲线分两支，右半支代表沿 $x$ 轴传播的右行击波的情况，左半支则相应于左行击波。可以看出，随着击波强度增强，即 $\sigma_1$ 越大，击波掠过后，质点被击波带动的速度就越快，即 $u_1$ 的绝对值越大。原点代表击波强度为零的情况，即没有击波通过，质点保持静止状态。第二，图上的虚线是将静止材料的击波极曲线（实线）沿着横轴平移而得，它的分支点落在 $u_1 = u_0$ 处，它代表波前材料具有速度 $u_0$ 的情况。之所以这样作，是因为从方程

$$\sigma_1 = g(u_1 - u_0; \rho_0, \sigma_0, E_0)$$

的性质, 看出 $\sigma_1$ 总是由 $u_1-u_0$ 所确定的(如 $\rho_0, \sigma_0, E_0$ 不变)。所以为了从实验上得到击波极曲线图, 只要对于静止材料做高速撞击的试验就可以了。在金斯洛(Ray Kinslow)所编《高速撞击现象》(High-Velocity Impact Phenomina)<sup>[32]</sup>一书的书末给出了好几种常用金属材料(如铜、铁、钢等)的击波阵面前后物理量变化值的表格。

### (3) 弹性纵波上的关系式

我们仍讨论一维应变的情况。假设弹性波在静止不动的介质中传播, 传播方向取为 $x$ 轴, 而在侧向即 $y$ 和 $z$ 方向不发生应变。这样 $y$ 和 $z$ 方向的应力是相等的。

对于弹性纵波, 在小变形的假设下, 可以应用虎克定律

$$\epsilon_x = -\frac{1}{E}[\sigma_x - 2\nu\sigma_y]$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{E}[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x]$$

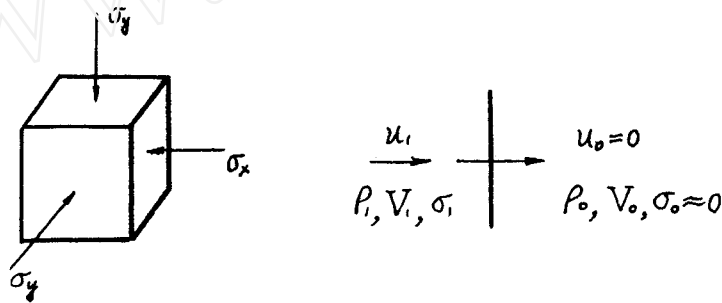


图 3-6

把上面两式结合起来, 得到 $x$ 方向的应变关系:

$$\epsilon_x = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)}\sigma_x \quad (3-10)$$

下面都是讨论 $x$ 方向的应力和应变, 故把下标 $x$ 省写了, 换成0或1表示波前或波后的量。因为侧向不变形, 所以 $x$ 方向的应变就反映比容的变化, 即有

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

把上面两个式子代入波速公式(3-5):

$$U^2 = V_0^2 \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{V_0 - V_1} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\sigma_1}{\frac{V_0 - V_1}{V_0}} = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\sigma_1}{-\epsilon_1}$$

可以得到弹性波速为

$$U_e = \sqrt{\frac{E}{\rho_0} \cdot \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (3-11)$$

这就是一维应变的弹性纵波的波速公式, 对于钢而言, 波速约为6.0。

如果把这个弹性波速记为 $c$ , 则在一般情况下, 用了前面的公式, 弹性波前后应力跳跃和速度跳跃的关系为:

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \pm \rho_0 c (u_1 - u_0) \quad (3-12)$$

其中负号代表沿着负 $x$ 轴方向传播的波。

如果应力增加到弹性极限, 根据特雷斯卡屈服条件, 应有

$$\sigma_1 - (\sigma_y)_1 = Y$$

这是简单拉伸的屈服极限, 利用侧向无应变的条件

$$(\varepsilon_y)_1 = -\frac{1}{E} [(1-\nu) \cdot (\sigma_y)_1 - \nu\sigma_1] = 0$$

可以求出平面击波加载使材料开始屈服时的波后应力和应变等为:

$$\sigma_1 = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot Y$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{1+\nu}{E} \cdot Y$$

$$V_1 = V_0(1 + \varepsilon_1) = V_0 \left(1 - \frac{1+\nu}{E} \cdot Y\right)$$

#### (4) 塑性波上的关系式

当应力超过弹性极限时, 便出现塑性波。为简便起见, 这里只讨论理想塑性材料的情况, 即在简单拉压情况下, 材料开始屈服以后, 应力不再随应变的增加而变化(图 3-7)。

我们可将应变拆为弹性和塑性两部分, 各用上标  $e$  和  $p$  表示。

弹性变形满足虎克定律

$$\varepsilon_x^e = -\frac{1}{E} (\sigma_x - 2\nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y^e = -\frac{1}{E} [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x]$$

塑性变形满足体积不变的条件

$$\varepsilon_x^p = -2\varepsilon_y^p$$

根据屈服条件, 应力满足

$$\sigma_x - \sigma_y = Y$$

又由于无侧向变形发生, 因此有

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^e + \varepsilon_y^p = 0$$

用了上面几个关系式, 可以求得  $x$  方向的塑性应力-应变关系

$$\sigma_x = -\frac{E}{3(1-2\nu)} \cdot \varepsilon_x + \frac{2}{3}Y。$$

并且可以求得开始屈服时的应力和应变值

$$\sigma^* = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot Y, \quad \varepsilon^* = -\frac{1+\nu}{E} \cdot Y$$

由此可见, 如果在弹性极限以上发生了一个突跃的塑性加载波, 那末塑性波速就等于

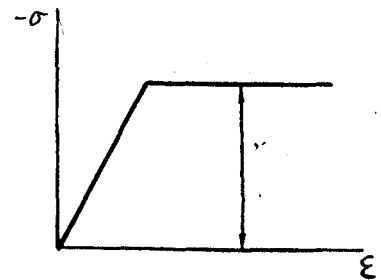


图 3-7

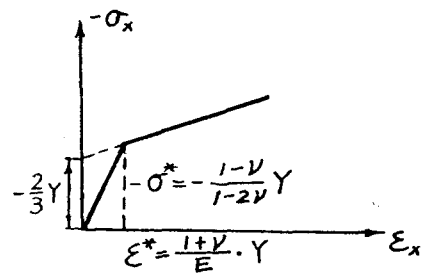


图3-8

$$\begin{aligned}
 U_p &= \sqrt{\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\rho_0 \cdot \frac{V_0 - V_1}{V_0}}} = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{-\varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \cdot \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \right)} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \cdot \left( -\frac{d\sigma_x}{d\varepsilon_x} \right)} = \sqrt{\frac{E}{\rho_0} \cdot \frac{1}{3(1-2\nu)}} \quad (3-13)
 \end{aligned}$$

其中应用了小变形的假设  $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_1 - \varepsilon_0$ 。如果注意到  $E/3(1-2\nu)$  正好是弹性变形时的体积压缩模量  $K$ ，则有

$$U_p = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad (3-14)$$

前面已经求得弹性波速公式 (3-11)，于是塑性波速和弹性波速之比为

$$\frac{U_p}{U_e} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu}} \quad (3-15)$$

一般情况下，塑性波速总小于弹性波速。如果  $\nu = 1/3$ ，则波速比为  $\sqrt{2/3}$ 。

#### 四、破甲机理（侵彻机理）的初步分析

在二次大战以后，无论在改进聚能装药结构以提高射流的破甲威力方面，或是在改善装甲板的防弹能力方面，都取得了很大进展。与此相配合，不少学者致力于破甲弹侵彻装甲靶板机理的研究。在二次大战期间所建立起来的不可压缩流体的侵彻理论，虽然指出了射流和靶板材料的密度是侵彻过程中的主要因素，但是不能说明其他一些因素所起的作用。尤其在现时，高强度金属装甲板的研制和生产取得很大的发展，非金属陶瓷装甲材料的研究也有新的进展。为了能求得侵彻过程的一系列现象和规律的合理的解释，并且希望能指出今后弹和板的研究和生产的发展方向，非常需要研究更为完善的侵彻模型和机理。下面分六节着重对侵彻金属材料靶板的过程给出一些初步的分析：

1. 破甲过程的一些现象；
2. 国外研究概况；
3. 不可压缩流体理论；
4. 侵彻初期压力和温度的估计；
5. 侵彻过程准定常阶段的初步分析；
6. 小结。

##### §1 破甲过程的现象描述

###### (1) 关于聚能射流的参数

破甲弹是一种具有一端装有内凹薄的锥形金属罩的聚能装药（图4-1）弹种，在另一端引爆后，爆震波作用到金属罩上，使罩以很大的速度向中心崩塌，并在轴线上发生碰撞。在碰撞高压的作用下，金属罩继续变形，汇成一股很细的向前运动的高速射流，这股射流可以穿透装甲。

一般情况下射流前后部分的速度是不均匀的。经过一定时间后，射流展开，头部速度大约为6—8公里/秒，尾部的速度大约为2公里/秒。射流质量约占金属罩质量的6—11%，射流



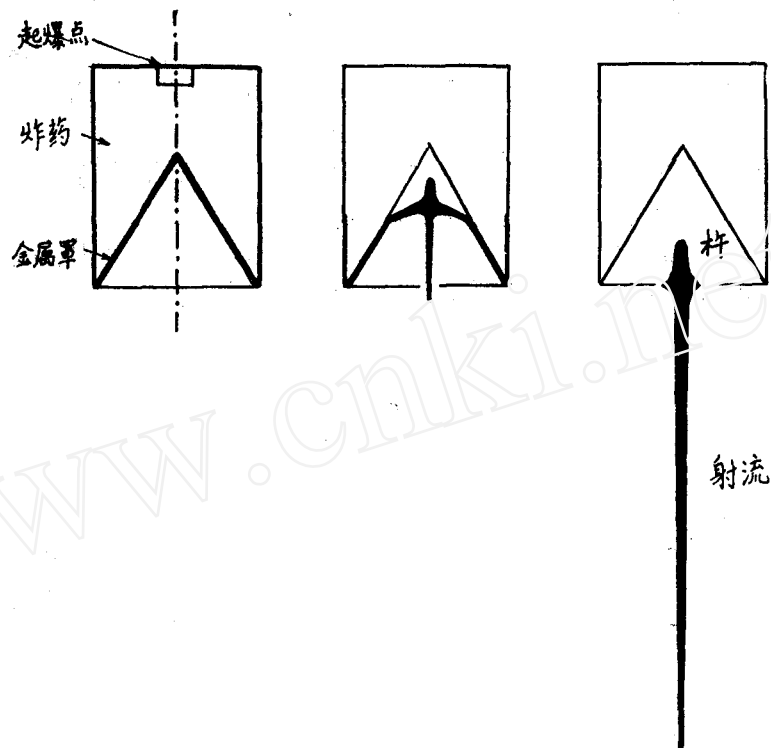


图 4-1

的温度有人估计为 $900\sim 1000^{\circ}\text{C}$ 。跟在高速射流后面的还有一段速度较低的杵，杵体的速度总是低于射流尾部的速度，大概在 $1.5$ 公里/秒以下。除射流用去一小部分质量外，金属罩的大部分质量转化为杵体。由于射流有不均匀的速度分布，所以射流的长度是随时间变化的，一般总是几百毫米的数量级。一般说，射流的直径也是不均匀的，头部细，愈近尾部愈粗。直径的尺寸随弹的大小而异，弹的尺寸愈大，射流的直径亦愈大，对一些典型弹而言，约为几毫米。射流飞行了一定时间以后，越拉越长的射流终于断裂成一串不连续的质点，在这种情况下破甲效果是很差的。

实际上，由于炮弹在飞出炮膛时，不仅有向前的速度，同时还有自转，所以着靶爆炸以后所形成的射流，也是一边向前运动一边绕轴转动。一般在讨论射流形成的机理或破甲机理时，总是不管这种转动的影响，而设法先弄清不旋转的破甲弹的破甲机理，然后有可能再把转动的影响估计进去。下面只讨论不旋转的情况。

#### (2) 破甲现象

在垂直破甲的情况下，射流头部先开出一个漏斗口，有少量靶板材料翻出形成唇缘，以一类典型破甲弹为例，口部直径为 $25$ 毫米左右。然后孔径逐渐变细，在相当长的一段长度（约占总孔深的 $85\sim 90\%$ ）上，孔径变化很缓慢，一般大约在几百毫米的长度上，孔径从 $20$ 毫米变细到 $15$ 毫米，这段长度上孔径与射流直径之比约在 $5\sim 10$ 的范围内。因此，似乎可以把整个过程分为两个阶段：初期是变化很快的开漏斗坑的阶段，孔径变化较大；在后来的更长的一段时间内，孔径随侵入深度缓慢变化，这个阶段可以认为是侵彻的主要阶段，而当作是一个准定常的侵彻问题来分析。

在炮弹斜射着靶的情况下,口部形成的漏斗更大,呈椭圆形,椭圆的长轴在射流对靶板的投影线上,长60毫米左右,短轴长40毫米左右。漏斗边缘上有明显的翻边形成唇绿的现象。进入漏斗以后,也有孔径缓慢变化的一段,在垂直于射流的截面上呈圆断面。侵彻深度约为几百毫米,但和垂直破甲的情况相比,深度有所减少。

在铜射流侵彻靶板的情况下,可以看到有喷铜现象。孔壁形状规则,都带有新鲜的铜色。入口处的表面上有时有色泽鲜明的喷铜情况。以略带间隙的多层靶板作试验时,发现常有铜喷射在板的下表面,而相邻下板的上表面的孔口也稍大些。同时,在下靶板正面相当于射流的来流方向的部位上,常喷有蛛丝状夹杂有铜(靶板材料)的网膜。喷铜的现象说明射流的温度比较高(图4-2)。

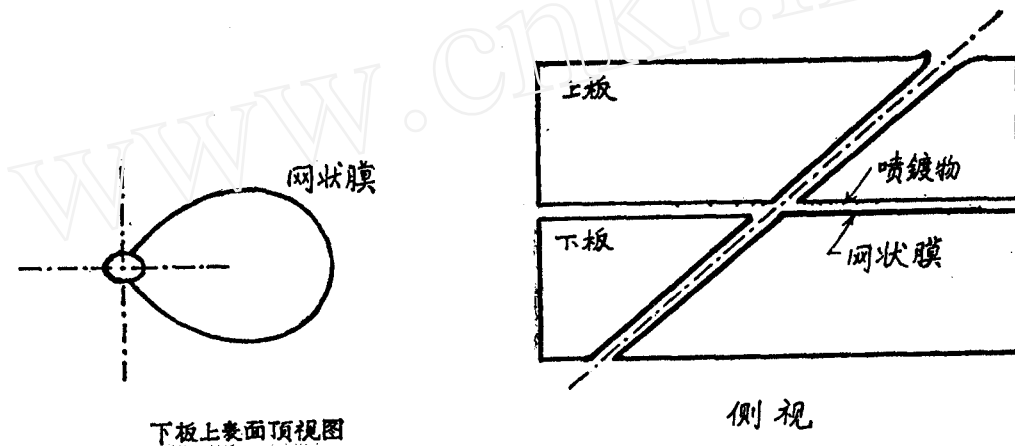


图 4-2

### (3) 射流侵彻金属靶板的基本过程

射流着靶时产生很高的局部碰撞压力,在靶板中及射流中各形成一个反向运动的冲击波。由于击波的绝热压缩,射流的着板部分和靶板的受力部分局部产生很高的温度。

射流受阻的部分,速度降低,压力增大。但是由于射流直径很小,所以作为卸载源的自由表面的影响,很快传播到射流的整个断面,一方面使击波的强度衰减下来,一方面使射流向侧向膨胀变粗。这样,击波的减速增压作用便不能继续向上游传播,后面的射流继续以很高的速度冲向靶板,因而在着板点附近形成射流的堆积,使堆积的能量和压力维持继续往下侵彻(图4-3)。

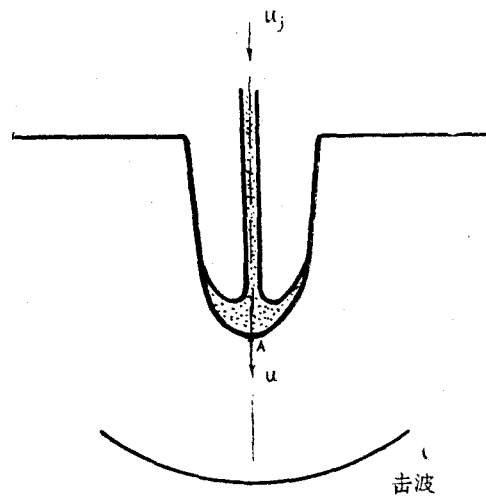


图 4-3

在靶板中也产生击波,波后的靶板材料产生轴向(射流方向)和半径方向的运动。在射流材料和靶板材料的界面(即接触面)上,对称轴上那一点的速度(沿着轴向)就是侵彻速度。虽然侵彻和击波最早都同时开始于射流头部着靶的时刻,但是由于侵彻速度小于击波的传播速度,因此击波很快地超前于侵彻点A。

由于一开始靶板是静止的，因此射流和靶板碰撞时产生很高的压力。另外，形成堆积需要一定的时间，堆积过程也是能量的积累过程，这个能量既用于形成漏斗，也用于进行侵彻。由于自由表面的存在，初期漏斗部位的材料变形条件不同于侵彻后期的变形条件。因此漏斗的形成是个过渡阶段，不同于后期变化较为缓慢的准定常阶段。

在后期，击波已远离侵彻点，侵彻速度趋于定常，即使射流仍然具有头部一样大的速度（事实上射流的速度是头部大、尾部小），但是由于击波后的区域，尤其是侵彻点附近的靶板材料已经获得相当大的速度，虽然侵彻速度和初期差不多，侵彻点附近的压力却会小得多。

在射流堆积处，材料处于很高的静水压的条件下，温度也比较高，因此有较好的流动条件；而压力的作用是各个方向都有的，因此，不仅产生轴向的侵彻，而且靶板材料在侧向受到很大的加速度。由于这个原因，以及由于射流材料的堆积，孔的直径比射流的直径要大得多（比值为5—10）。我们还可以从三种弹的对比看这个问题。弹的比能越大，直径比值也越大（表1）。

表 1

	弹速 (公里/秒)	弹的比能量 (尔格/克)	孔径·弹径
普通穿甲弹	0.5	$0.125 \times 10^{10}$	1:1
次口径弹	1.5	$1.125 \times 10^{10}$	2.5:1
破甲弹	5.0	$12.5 \times 10^{10}$	5—10:1

## §2 国外关于侵彻机理研究的概况<sup>[33]</sup>

在二次大战期间，贝尔克霍夫 (Birkhoff) 和泰勒 (Taylor) 等以及拉甫连捷夫 (Лаврентьев) 分别独立地建立了不可压缩流体的侵彻理论。他们指出，侵彻速度和侵彻深度只取决于靶板和射流的密度。然而二次大战以后，装甲金属材料的研究取得很大的发展，高强度金属材料的研制成功，大大增强了装甲的防破甲弹的能力。显然单从密度这一因素说明问题已远远不够了，于是有不少人在侵彻机理方面提出新的看法，想说明其他一些因素对侵彻过程的影响。佩尔让 (Pergent, 1959) 提出高温熔化起主要作用。巴布尔 (Babul, 1964) 提出，后面的射流不是直接作用于靶板材料，而是在其前面的堆积层中继续侵彻。伊万斯和帕克 (Evans and Pack, 1951) 考虑了靶板材料屈服强度的影响，在不可压缩模型的侵彻深度公式中引进了强度修正因子。艾歇尔伯格 (Eichelberger, 1954—1956) 也认为强度起作用，他引进弹板材料的硬度差来进行修正。亚伯拉罕森和古迪尔 (Abrahamson and Goodier, 1963) 考虑了射流速度分布是不均匀的这个因素。鲍姆和斯达纽柯维奇 (Баум и Станюкович, 1959) 考虑了靶板材料的可压缩性的影响。还有一些人认为射流是不连续的物质流，等等。但是他们都没有给出较为完善的理论模型，多数属于从工程角度提出一些修正的方法。最近哈洛和普拉赫特 (Harlow and Pracht, 1966)<sup>[34]</sup>在电子计算机上用可压缩流体模型计算了侵彻过程。看来高速计算机的发展已经为较好地解决侵彻机理的问题创造了良好的条件。

## §3 射流侵彻的不可压缩流体理论模型 (定常情况)

因为迄今为止，最基本的理论模型还是不可压缩流体模型，所以现在作一些简略的介

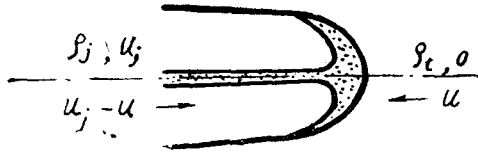


图 4-4

绍。

这里只考虑定常运动的情况，即假设射流的速度分布是均匀的，侵彻速度也是不变的。由于射流和靶板发生碰撞时产生很高的压力和温度，压力往往比材料的强度大得多，粗略地可以假设射流和靶板均为不可压缩的流体，密度各为 $\rho_j$ 和 $\rho_t$ 。

设射流以速度 $u_j$ 射向靶板，侵彻速度为 $u$ 。为了计算方便起见，把坐标系取在侵彻点 $A$ 上面，或者说在整个图片上都叠加一个 $-u$ ，即：射流以速度 $u_j - u$ 射向侵彻点；侵彻点固定不动，可称之为驻点；远处的靶板以速度 $-u$ 向侵彻点流去（图4-4）。

在这种情况下，除了密度不变外，不论是对于靶板还是对于射流，应力偏量 $s_r, s_\theta, s_z, \tau$ 都为零； $E = E_v = \text{常数}$ ，因而可以取为零。另外，因为问题是定常的，所以任何量对于时间的偏微商都等于零。这样，沿通过驻点 $A$ 的流线，根据第三节§3给出的能量方程，我们有

$$p + \frac{\rho_j}{2} v^2 = \text{常数} = \frac{\rho_j}{2} (u_j - u)^2$$

$$p + \frac{\rho_t}{2} v^2 = \text{常数} = \frac{\rho_t}{2} u^2$$

这里，前一式适用于射流，后一式适用于靶板。在驻点处，射流与靶板的质点速度 $v$ 均等于零。作用等于反作用的原理要求两个式子给出的驻点压力应该相同，于是得出 $u_j$ 与 $u$ 的关系如下：

$$\frac{1}{2} \rho_j (u_j - u)^2 = \frac{1}{2} \rho_t u^2 (= p_A) \quad (4-1)$$

或

$$u = \frac{u_j}{1 + \sqrt{\frac{\rho_t}{\rho_j}}} \quad (4-2)$$

式中 $p_A$ 是驻点压力。

可以看出，侵彻速度和射流速度成正比，和密度比也有直接关系。如果二者材料相同，那末侵彻速度正好是射流速度的一半。但若靶板的密度比射流的密度大，则侵彻要慢些，反之则快些。

如果射流是有限长的，设长度为 $L$ ，总的侵彻时间为 $t$ ，则破甲深度 $p$ 应该等于侵彻速度 $u$ 乘上时间 $t$ ，即

$$p = u \cdot t$$

而射流长度 $L$ 则应等于被靶所吃掉的速度 $u_j - u$ 乘上时间 $t$ ，即

$$L = (u_j - u) \cdot t$$

将上面两个式子比一下，再用上前面侵彻速度的公式，即可得到

$$\frac{\text{破甲深度} p}{\text{射流长度} L} = \frac{u}{u_j - u} = \sqrt{\frac{\rho_j}{\rho_t}}$$

可以看出，如果射流和靶板的材料相同，则破甲深度等于射流长度；如果射流的密度大于靶板的密度，则破甲深度大于射流长度，反之则小于射流长度。

#### §4 侵彻初期压力和温度的估计

##### (1) 最高压力和最高温度

当射流的头部撞到靶板的瞬间，由于靶板一开始是静止的，所以立刻就从碰撞点同时向靶板和射流内部反向地传出两个击波，又由于射流头部的速度最高，所以击波通过以后碰撞点附近的材料受到最大程度的绝热压缩，而达到整个侵彻过程的最高压力和最高温度。

因为压力高达百万大气压，材料已呈现流体的性质，可以利用文献〔32〕中所给的铜和钢的击波的雨果尼奥数据，把碰撞的最高压力和温度估算出来。因为碰撞后，向原来是静止的钢靶板中传播一个和射流速度同方向的击波，而向原来速度为 $u_j$ 的铜射流中传播一个反向击波。所以在速度—压力平面上，钢的极曲线应该是右分支，分支点在原点处，而铜的极曲线应该是左分支，分支点在 $u=u_j$ 处。碰撞以后碰撞处的状态点应该既在钢的极曲线上，又在铜的极曲线上，所以就是两条极曲线的交点（图4-5）。

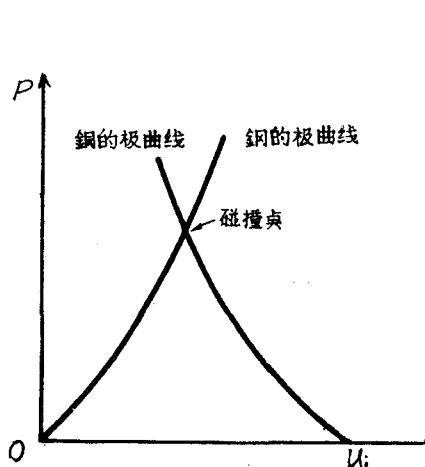


图 4-5

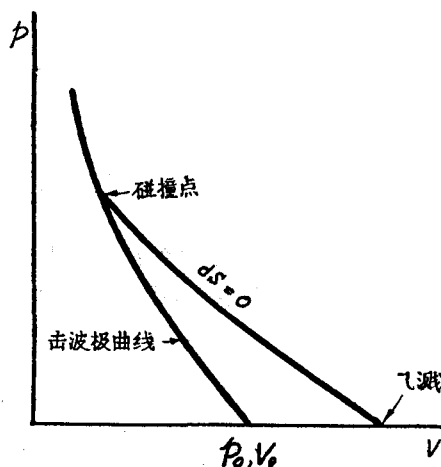


图 4-6

##### (2) 飞溅物质的温度

在射流头部开孔的初期，发现有飞溅的现象，在靶板正表面上留下溅铜的痕迹。射流头部的材料，从碰撞瞬间击波将其压缩到最高的压力和温度，到开始飞溅时，材料的膨胀过程基本上可以认为是一个等熵过程，可以估计飞溅时材料的温度仍然在熔点以上（图4-6）。

先简单推导等熵膨胀过程温度变化的公式。由热力学第一定律，

$$TdS = dE + PdV = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p\right]dV$$

因  $\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = C_v$ ,  $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$  [用熵的二次微商次序可以交换,

$$\text{即 } \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right) = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right), \text{ 便可求得}]$$

所以等熵过程便有

$$C_v dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV = 0$$

式中的  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$  可以利用给吕乃森状态方程再演算一步。列出状态方程

$$p - p_k = \frac{\gamma}{V}(E - E_k)$$

其中  $p_k$ ,  $E_k$ ,  $\gamma$  均为比容  $V$  的函数。式子两边对温度求偏微商, 可得

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\gamma}{V}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{\gamma}{V}C_v$$

于是对于等熵过程, 便有

$$C_v dT + T\frac{\gamma}{V}C_v dV = 0$$

即

$$\frac{dT}{T} = -\gamma \frac{dV}{V}$$

从碰撞点的状态到开始飞溅的状态进行积分, 并近似地认为开始飞溅的温度和等熵线上相应于原始比容点的温度差不多。用下标 0 和  $m$  分别记原始点和碰撞点的状态, 即有

$$\frac{T_{\text{飞溅}}}{T_m} = e^{-\int_{V_m}^{V_0} \frac{\gamma}{V} dV}$$

文献〔32〕的附表中列有铜材料卸压到大气压时的温度, 可以查考。

以铜射流射击 304 钢为例, 查表计算得到最高压力、最高温度和开始飞溅的铜质点的温度, 列于表 2。

表 2

射流速度 (公里/秒)	最高压力 (兆巴)	最高温度 (°K)		铜的飞溅温度 (°K)
		钢	铜	
4.85	1.60	3125	3561	1592
5.26	1.80	3758	4271	1791
5.64	2.00	4436	5026	1978
6.02	2.20	5156	5821	2151

## § 5 侵彻过程准定常阶段的初步分析——流体、弹塑性模型

由于用不可压缩流体模型不能说明侵彻过程中不少重要的现象和问题，必须考虑可压缩性、高温熔化、材料的塑性和强度等因素的影响。本节对破甲的主要阶段，即开漏斗以后的准定常变化阶段，作一些初步的分析。

### (1) 理想可压缩流体模型

在射流头部打击靶板形成漏斗这一初始阶段，压力高达几十万甚至上百万大气压，材料的强度自然可被忽略。到了后来的准定常变化阶段压力虽然降低不少，但据估计仍可达到20—30万大气压。为了分析可压缩性的影响，这里先假设材料是可压缩无粘性的流体，运动是定常的。假设射流速度为 $u_j$ ，侵彻速度为 $u$ （参看图4-4）。

象处理不可压缩流体定常侵彻的问题一样，仍然在对称轴上列出射流和靶板两方面的能量守恒积分关系。由于问题是定常的，所以 $\frac{d}{dt} = u \frac{\partial}{\partial r} + v \frac{\partial}{\partial z}$ ；由于是无粘性可压缩流体，所以应力偏量均为零；由于是在对称轴上，所以 $u=0$ ， $\frac{d}{dt} = v \frac{\partial}{\partial z}$ 。所以对称轴上的能量守恒关系为

$$\rho v \frac{\partial}{\partial z} \left( E_v + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

或

$$E_v + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{常数}$$

把坐标原点取在侵彻点A上，于是射流和靶板在远离侵彻点处的速度各为 $u_j - u$ 及 $-u$ （ $z$ 轴向右为正）。

将上式分别应用于射流和靶板材料，我们得到驻点压力的两个表达式：

$$\left. \begin{aligned} p &= \rho_j^* \left[ \frac{1}{2} (u_j - u)^2 + E_{j_0} - E_j^* \right] \\ p &= \rho_t^* \left( \frac{1}{2} u^2 + E_{t_0} - E_t^* \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

式中， $\rho_j^*$ ， $\rho_t^*$ 分别表示驻点处射流和靶板材料的密度， $E_j^*$ ， $E_t^*$ 表示相应的比内能， $E_{j_0}$ ， $E_{t_0}$ 表示相对于驻点两股来流的原始比内能。

在已知状态方程的条件下，根据等熵压缩的条件，我们有

$$\left. \begin{aligned} p &= f_j(\rho_j^*), \quad p = f_t(\rho_t^*), \\ E_j^* &= g_j(\rho_j^*), \quad E_t^* = g_t(\rho_t^*) \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

因此，给定 $u_j$ ，就可从以上六个关系求得 $p$ ， $u$ ， $\rho_j^*$ ， $\rho_t^*$ ， $E_j^*$ ， $E_t^*$ 。

由于一般只给出状态方程和等熵关系的图表式，所以只能采用数值解法。下面利用文献〔32〕中所给材料性能的表格，对于一定的靶板材料，给出侵彻速度和侵彻点上压力、温度之间的关系。计算分四步：

第一，给定某一侵彻点上的比容，求侵彻点上的温度。

因为从无穷远处流到侵彻点，过程是等熵的，故可用等熵公式求出温度为

$$T = T_0 e^{-\int_{V_0}^V \frac{\gamma}{V} dV}$$

其中 $T_0, V_0$ 为无穷远处靶板的温度和比容,也即原始温度和比容, $T, V$ 为侵彻点上的温度和比容。

第二,求侵彻点上的内能(图4-7)。

因为已知材料的雨果尼奥方程,所以对给定的比容 $V$ ,可以求出与之相应的击波面上的压力 $p_H$ ,代入状态方程 $E = E(p, V)$ ,可以求出相应的内能 $E_H$ 。从图上可以看出,这一击波状态和侵彻点上的状态落在一条平行于 $p$ 轴的直线上,也就是说二者之间存在等容变化的关系,因此根据等容比热的定义,可求得侵彻点上的内能为

$$E = E_H - (T_H - T)C_v$$

第三,求侵彻点上的压力。

将侵彻点上的比容、内能值代入给吕乃森方程,求出压力为

$$p = p_H + \frac{\gamma}{V}(E - E_H)$$

第四,求侵彻速度。

若已知原始材料的内能 $E_0$ (表上给出),则用公式(4-3)求出侵彻速度为

$$u = \sqrt{2\left(E - E_0 + \frac{p}{\rho}\right)}$$

**算例:**

这里给出用1018钢作靶板材料的算例。表上给出材料的 $\gamma = 1.690$ ,德拜温度 $\theta_D = 175^\circ\text{K}$ 。计算取了两种近似,或认为 $\gamma$ 是常数,或认为 $\frac{\gamma}{V}$ 是常数,即 $\frac{\gamma}{V} = \frac{1.690}{V_0}$ ,结果证明算出的温度只在第三位数字上有差别。把结果列于表3。为与不可压缩模型相比,表中并列出不可压缩情况下对应于给定密度和压力的侵彻速度(即 $u = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}$ )。

**表 3**

$\rho$ (克/厘米 <sup>3</sup> )	$\rho_0 = 7.85$ (克/厘米 <sup>3</sup> ) $E_0 = 0.105 \times 10^{10}$ (尔格/克)				不可压缩
	$T$ (°K)	$E$ (尔格/克)	$p$ (兆巴)	$u$ (公里/秒)	$u$ (公里/秒)
8.475	332	$0.147 \times 10^{10}$	0.100	1.56	1.60
8.917	358	$0.233 \times 10^{10}$	0.197	2.17	2.22
9.266	380	$0.335 \times 10^{10}$	0.292	2.60	2.73
9.556	394	$0.445 \times 10^{10}$	0.385	2.96	3.13
9.806	410	$0.560 \times 10^{10}$	0.476	3.25	3.48

根据表3,我们可以画出靶板的 $p-u$ 曲线(图4-8)。用同样的方法,可以算得射流的 $p-(u_j-u)$ 曲线。两条曲线的交点,就表示侵彻压力与侵彻速度。

由以上计算结果可见,第一,与开漏斗过程相比,如果侵彻速度相等,则定常侵彻所需的压力就要小得多。当侵彻速度在1.56—2.60公里/秒之间时,定常侵彻的压力在10—30万大气压之间。第二,理想可压缩流体理论与不可压缩流体理论相比,在侵彻速度相等的条件下,前者所需的压力要大一些,而且侵彻速度愈大,差别也愈大。图4-8中的虚线表示不可



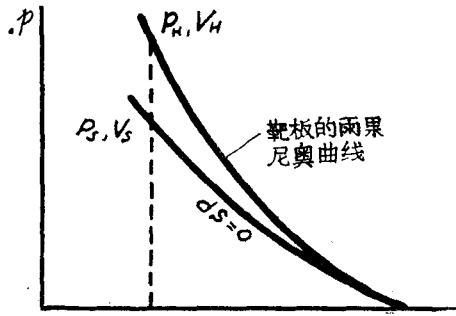


图4-7

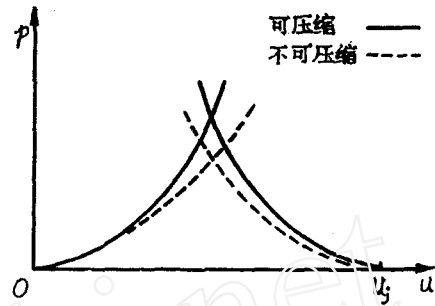


图4-8

压缩流体理论的 $p-u$ 和 $p-(u_j-u)$ 关系,它们显然都是抛物线〔参看公式(4-1)〕。从图4-8可见,在射流的条件一定时,靶板的可压缩性使侵彻速度降低,而在靶板的条件一定时,射流的可压缩性使侵彻速度提高。最后,表3的计算结果表明,靶板的温升显然不够高。这是由于忽略了强度影响所产生的结果。这点在下面将会看到。

对于射流可以进行类似的计算。这里我们来计算一下,要在钢里产生侵彻压力和侵彻速度分别为 $p=0.135$ 兆巴, $u=1.82$ 公里/秒,需要什么样的射流条件。我们仍假设射流是可压缩无粘性流体。先给定无穷远处的射流比容为 $V_0$ ,温度为 $T_0=20^\circ\text{C}$ 。可以用等熵公式求出从无穷远处的比容 $V_0$ 等熵压缩到侵彻点处的比容 $V$ ,相应的侵彻点上的温度为

$$T = T_0 e^{-\int_{V_0}^V \frac{\gamma}{V} dV}$$

由文献(32)中的表查出对应于比容 $V$ 的击波雨果尼奥曲线上的温度值 $T_H$ ,压力值 $p_H$ 和内能值 $E_H$ 。于是侵彻点上的内能就等于

$$E = E_H - (T_H - T)C_v$$

代入给吕乃森状态方程,可以求出侵彻点上的压力 $p$ 为

$$p = p_H + \frac{\gamma}{V}(E - E_H) = p_H + \frac{\gamma}{V}C_v(T - T_H)$$

如果这个压力不等于0.135兆巴,那末要修正所假设的侵彻点上的比容值 $V$ 。几次修正或叠代,可以算出对应于侵彻压力和速度分别为 $p=0.135$ 兆巴和 $u=1.82$ 公里/秒,射流速度为 $u_j=3.30$ 公里/秒,并且求出侵彻点上射流温度大概是 $350^\circ\text{K}$ 。这个温度显然是不合理的。因为侵彻过程中有明显的溅铜现象,温度应该高于 $350^\circ\text{K}$ 才对。这是因为我们假设原始射流的温度只有 $20^\circ\text{C}$ ,而射流的形成本来就是一个高速高压聚能崩塌和挤压的过程,射流的温度应该是相当高的。

如果给定无穷远处的射流的温度不是 $20^\circ\text{C}$ ,而譬如说是 $800^\circ\text{C}$ ,又可以同样再算一遍。所不同的是,射流的原始比容就不是 $V_0$ ,可以近似地假设,射流的状态从 $(V_0, T_0=20^\circ\text{C})$ 变到温度是 $800^\circ\text{C}$ 的过程,是一个常压的加热膨胀过程,加热的原因就是射流形成过程中的塑性变形功。在状态方程一节中曾经指出计算热胀系数的公式

$$\alpha = \frac{\gamma C_v}{\frac{K}{\rho}} = \frac{\gamma C_v}{a_0^2}$$

其中 $K$ 是体胀系数,  $\alpha_0$ 是状态点 ( $V_0, T_0=20^\circ\text{C}$ ) 处的声速, 这里又近似地假设在常压加热膨胀过程中, 声速变化不大。那末相应于射流温度为 $800^\circ\text{C}$ 的比容 $V'_0$ 应该等于 $V'_0=V_0[1+\alpha(800^\circ\text{C}-20^\circ\text{C})]$ 。再计算一遍的结果是: 射流速度 $u_j=3.54$ 公里/秒, 侵彻点上的射流温度在 $1200^\circ\text{K}$ 左右, 这样的温度可以说明溅铜现象。

## (2) 不可压缩流体—理想刚塑性模型

现在我们讨论强度对侵彻的影响, 仍假定为定常侵彻。上面已经对可压缩性的影响做了初步分析, 为简便起见, 以下将只考虑不可压缩流体—理想刚塑性模型。首先, 我们列出这个条件下的基本方程, 特别是沿对称轴的运动方程和能量方程。然后依次讨论两个问题: 靶板材料性质的分析和靶板的  $|\sigma_z| - u$  关系。对这两个问题, 我们考虑  $\frac{Y_0}{\frac{1}{2}\rho_t u^2} \ll 1$  的情况, 也就是说流动情况接近于不可压缩流体, 强度影响只是一种小的修正。

### ① 基本方程

在不可压缩的假定下, 应变率偏量等于应变率, 在刚塑性假设下, 塑性应变率偏量等于应变率, 因此基本方程可以简化为:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{s_r - s_\theta}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial z}$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau r}{\partial r}$$

$$u \frac{\partial E}{\partial r} + v \frac{\partial E}{\partial z} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{Y}{\rho} \left[ \dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + \dot{\epsilon}_\theta^2 + 2\dot{\gamma}^2 \right]^{1/2}$$

$$\left. \begin{aligned} s_r &= \frac{\sqrt{2/3} Y}{(\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{1/2}} \dot{\epsilon}_r \\ s_\theta &= \frac{\sqrt{2/3} Y}{(\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{1/2}} \dot{\epsilon}_\theta \\ s_z &= \frac{\sqrt{2/3} Y}{(\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{1/2}} \dot{\epsilon}_z \\ \tau &= \frac{\sqrt{2/3} Y}{(\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{1/2}} \dot{\gamma} \end{aligned} \right\} (\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{1/2} = (\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_\theta^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + 2\dot{\gamma}^2)^{1/2}$$

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{u}{r}, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \dot{\gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

根据托尔 (Towle) 的经验公式, 我们取

$$Y = \sigma_0(1 + \alpha p)e^{-\beta T/T_M(p)} \quad (4-5)$$

其中 $\sigma_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ 是材料常数,  $T_M(p)$ 是该材料在压力为 $p$ 时的熔点。根据林德曼(Lindeman)理论的西蒙(Simon)公式,  $T_M(p)$ 可表示为

$$T_M(p) = (1 + \gamma p)^\nu T_{M0} \quad (4-5)$$

其中 $\gamma$ ,  $\nu$ 是材料常数,  $T_{M0}$ 是零压或常压时的熔点。另外, 对于不可压缩的介质, 比内能 $E$ 可以表示为

$$dE = C_v dT$$

以下我们取等容比热 $C_v$ 为常数。

在对称轴上, 利用质量守恒关系, 我们有

$$v = q(z) + h(z)r^2 + O(r^4)$$

$$u = -\frac{1}{2}q'(z)r - \frac{1}{4}h'(z)r^3 + O(r^5)$$

因此, 当 $r \rightarrow 0$ 时, 如我们取靶板相对于驻点的运动方向为 $z$ 轴方向, 就有

$$(\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij})^{1/2} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{dq}{dz} \quad \left(\frac{dq}{dz} < 0\right)$$

所以能量方程可写为

$$\rho C_v q \frac{dT}{dz} = -Y \frac{dq}{dz} \quad (4-7)$$

同样, 当 $r \rightarrow 0$ 时,

$$\tau = -\frac{\frac{2}{3}Y}{\frac{dq}{dz}} \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2}q''(z) + 2h(z) \right] r + O(r^3)$$

所以

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial \tau r}{\partial r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\tau}{r} = -\frac{\frac{2}{3}Y}{\frac{dq}{dz}} \left[ -\frac{1}{2}q''(z) + 2h(z) \right]$$

$$= -\frac{\frac{2}{3}Y}{\frac{dq}{dz}} \lim_{r \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right)$$

因此在对称轴上,  $z$ 方向上的运动方程可写为

$$\rho \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2}q^2 - \frac{\sigma_z}{\rho} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\tau}{r}$$

$$= -\frac{\frac{2}{3}Y}{\frac{dq}{dz}} \lim_{r \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) \quad (4-8)$$

②能量方程的近似积分

当  $S \equiv \frac{Y_0}{\frac{1}{2}\rho u^2}$  很小时, 作为零次近似可以取  $p = \frac{1}{2}\rho(u^2 - q^2)$ 。把这种近似引入能量方程 (4-7), 并利用托尔公式和西蒙公式消去  $T$  和  $T_M(p)$ , 可以很容易地得出  $Y$  与  $q$  的关系式如下:

$$\frac{(1+\gamma p)^\nu}{Y} \frac{dY}{dq} = \frac{\beta Y}{\rho C_v \gamma T_{M0}} + \rho q \left\{ \frac{\gamma \nu}{(1+\gamma p)^{1-\nu}} \left[ \ln \frac{Y}{\sigma_0} - \ln(1+\alpha p) \right] - \frac{\alpha(1+\gamma p)^\nu}{1+\alpha p} \right\}$$

引入无量纲变数

$$\bar{Y} = \frac{Y}{Y_0} \quad (\text{其中 } Y_0 \text{ 为 } p=0, T=T_0 \text{ (常温) 时, 即无穷远处来流的屈服极限}),$$

$$\bar{q} = \frac{q}{u}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\frac{1}{2}\rho u^2} = 1 - \bar{q}^2$$

和无量纲参数

$$\pi_1 = \frac{\beta Y_0}{\rho C_v T_{M0}}, \quad \pi_2 = \frac{1}{2} \rho u^2 \gamma \nu = \frac{Y_0 \gamma \nu}{S} \quad \left( S = \frac{Y_0}{\frac{1}{2}\rho u^2} \right)$$

$$\pi_3 = \frac{\beta T_0}{T_{M0}}, \quad \pi_4 = \frac{1}{2} \alpha \rho u^2 = \frac{\alpha Y_0}{S}$$

我们就有

$$\left( 1 + \frac{\pi_2 \bar{p}}{\nu} \right)^\nu \frac{1}{\bar{Y}} \frac{d\bar{Y}}{d\bar{q}} = \pi_1 \frac{\bar{Y}}{\bar{q}} + 2\bar{q} \left\{ \frac{\pi_2}{\left( 1 + \frac{\pi_2 \bar{p}}{\nu} \right)^{1-\nu}} \left[ \ln \bar{Y} - \pi_3 - \ln(1 + \pi_4 \bar{p}) \right] - \frac{(1 + \pi_2 \bar{p}/\nu)^\nu}{1 + \pi_4 \bar{p}} \pi_4 \right\} \quad \text{当 } \bar{q} = 1, \bar{Y} = 1 \text{ 时} \quad (4-9)$$

微分方程 (4-9) 有以下特点:

当  $\bar{Y} > 0$ , 而  $\bar{q} \rightarrow 0^+$  时,  $\frac{d\bar{Y}}{d\bar{q}} \rightarrow +\infty$ ,  $\bar{Y} = 0$ ,  $\bar{q} = 0$  是 (4-9) 的奇点, 可以证明,

所有的解都通过奇点并与  $\bar{Y}$  轴相切。

在  $\bar{q} = 1$  时,

$$\frac{d\bar{Y}}{d\bar{q}} = \pi_1 - 2\pi_2 \pi_3 - 2\pi_4 = \pi_1 \left[ 1 - \frac{2}{S} \left( \rho C_v \gamma \nu T_0 + \frac{\alpha \rho C_v T_{M0}}{\beta} \right) \right] \quad (4-10)$$

所以, 在  $\bar{q} = 1$  时,  $\frac{d\bar{Y}}{d\bar{q}}$  的符号取决于

$$S \gtrless 2\rho C_v \gamma \nu T_0 + 2\alpha \rho C_v T_{M0} / \beta \equiv S_1$$

这样,  $(\bar{Y}, \bar{q})$  的定性关系就描绘出来了 (图 4-9)。

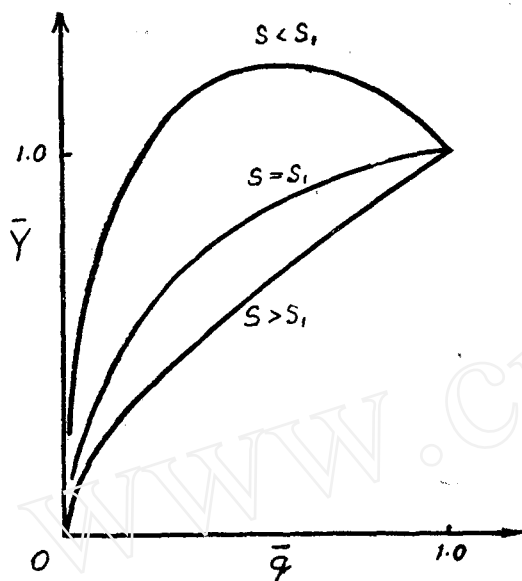


图 4-9

钢的大致数据如下:

$$\alpha = 2 \times 10^{-12} \text{ 达因/厘米}^2,$$

$$\beta = 5$$

$$\gamma = \frac{1}{1.5} \times 10^{-11} \text{ 达因/厘米}^2,$$

$$\nu = \frac{1}{4}$$

$$T_{M0} = 1698^\circ \text{ K},$$

$$C_p = 5.02 \times 10^6 \text{ 尔格/克}$$

在  $T_0 = 300^\circ \text{ K}$  的条件下,  $S_1 = 9.2 \times 10^{-2}$ , 如取  $Y_0 = 10^{10}$  达因/厘米<sup>2</sup>, 则与这个  $S_1$  相

当的侵彻速度为 1.66 公里/秒, 即如果实际侵彻速度大于此值, 则  $\left(\frac{d\bar{Y}}{d\bar{q}}\right)_1 < 0$ 。

### ③ $\sigma_z^*$ — $u$ 侵彻关系的讨论

根据不可压缩流体—理想刚塑性理论, 远距侵彻的上游和下游, 有刚塑性的分界面。首先估计一下这塑性变形区的大小。以侵彻点为中心, 取一半径为  $L$ , 长度为  $2L$  的圆柱控制面,  $L$  是上、下游刚塑性分界面到侵彻点的距离。以  $r_0$  表示射流侵彻后在靶板中所形成圆孔的半径, 以  $F$  表示射流作用于靶板的合力。

把动量守恒原理应用于这个控制面, 即在定常流条件下, 作用于控制面上的  $z$  方向上的合力应该等于单位时间内从这个控制面所流出的  $z$  方向上的总动量。

作用于圆柱面  $AB$  和端面  $AA, BB$  的  $z$  方向合力显然正比于  $Y_0 L^2$ 。从控制面流出的总质量等于零, 而且由于刚塑性假设, 每部

由以上讨论可见, 在侵彻点上,  $\bar{Y} \rightarrow 0$ , 也就是说  $T \rightarrow \infty$ 。事实上这当然是不可能的, 但是可以认为, 在侵彻点的局部位置上, 温度一定是很高的。

对于指定的材料和  $T_0$ , 侵彻速度愈大 ( $S$  愈小), 材料的相对抗侵彻能力就愈显著, 因为  $\bar{Y}$  比较大。

式 (4-10) 又可写为

$$\left(\frac{d\bar{Y}}{d\bar{q}}\right)_{\bar{q}=1} = -Y_0 \left( \frac{\beta Y_0}{\rho C_p T_{M0}} - \rho u^2 \gamma \nu \frac{\beta T_0}{T_{M0}} - \alpha \rho u^2 \right)$$

从提高靶板抗侵彻的能力看,  $\bar{Y}$  随  $\bar{q}$  降低得愈慢愈好。因此, 提高  $Y_0$ , 减小  $\frac{\beta Y_0}{\rho C_p T_{M0}}$  (即增大  $\rho C_p T_{M0}$ ), 增加  $\gamma \nu$  和  $\alpha$ , 是能增加抗侵彻能力的。

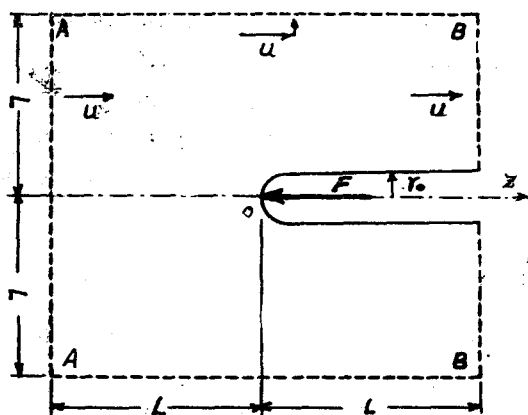


图 4-10

分流量的 $z$ 方向分速度都是 $u$ 。因此单位时间内从控制面流出的总动量等于零,也即

$$\rho\pi(L^2-r_0^2)u^2 + \rho\pi r_0^2 u^2 - \rho\pi L^2 u^2 = 0$$

这样,我们就得到

$$F \propto Y_0 L^2$$

但是作为一次近似,我们有

$$F \approx \pi r_0^2 \frac{1}{2} \rho u^2$$

所以

$$\frac{r_0}{L} = \text{常数} \times \sqrt{S} = \frac{1}{C} \sqrt{S} \quad (4-10)$$

现在对 $z$ 方向上的动量方程(4-8)进行形式上的积分。首先,可以取

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\tau}{r} = \frac{Y(z)}{r(z)} = \frac{Y_0}{r_0} \frac{\bar{Y}}{\bar{r}}, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_0}$$

这个式子可以看作是 $\bar{r}$ 的定义。代入式(4-8)并进行积分,积分限由弹塑性区的边界 $z=-L$ 到 $z=0$ ,我们得出

$$\left| \sigma_z^* \right| = \frac{1}{2} \rho u^2 - \sigma_z(L) + \frac{Y_0 L}{r_0} \int_{-1}^0 \frac{\bar{Y}}{\bar{r}} d\bar{z}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L}$$

根据弹塑性理论,  $-\sigma_z(L) = 2Y_0$  (泊松系数=0.3)。再利用关系式(4-11),得出

$$\left| \sigma_z^* \right| = \frac{1}{2} \rho u^2 \left( 1 + 2S + C\sqrt{S} \int_{-1}^0 \frac{\bar{Y}}{\bar{r}} d\bar{z} \right) \quad (4-12)$$

这个式子中的常数 $C$ 和函数 $\bar{r}(\bar{z})$ 是需要进一步研究的问题,一般说来 $\bar{r}(\bar{z})$ 包含 $S$ 。

艾歇尔贝格给出的经验公式是

$$\left| \sigma_z^* \right| = \frac{1}{2} \rho U^2 + K$$

这相当于式(4-12)的前两项,如果取 $K=2Y_0$ ,则艾歇尔贝格的公式与式(4-12)的前两项完全相同。图4-11给出 $C=0$ 的情况下,射流速度与侵彻速度的关系(忽略射流的强度和可压缩性)。很显然,在这种假设条件下,强度的修正只有在射流速度相当低时才显著。

有些实验表明,在射流速度相当大时强度影响已经显示出来了。从理论上讲,式(4-12)括号中的第三项在高速侵彻条件下,可能比第二项更大,因为后者是弹性区小变形所引起的,而前者是塑性区大变形的结果。

## §6 小 结

我们介绍了静破甲试验中的一些典型现象和数据,并结合流体—弹塑性理论进行了一些初步的分析。

在射流与靶板开始接触时,即开漏斗的初期,压力可达200万大气压,温度可达5000°K。在这种情况下,可以用可压缩流体理论进行分析,而材料强度对侵彻速度的影响可忽略不计。因此,可以估计到,在漏斗深度的范围内,提高防护板的强度不会有什么作用。

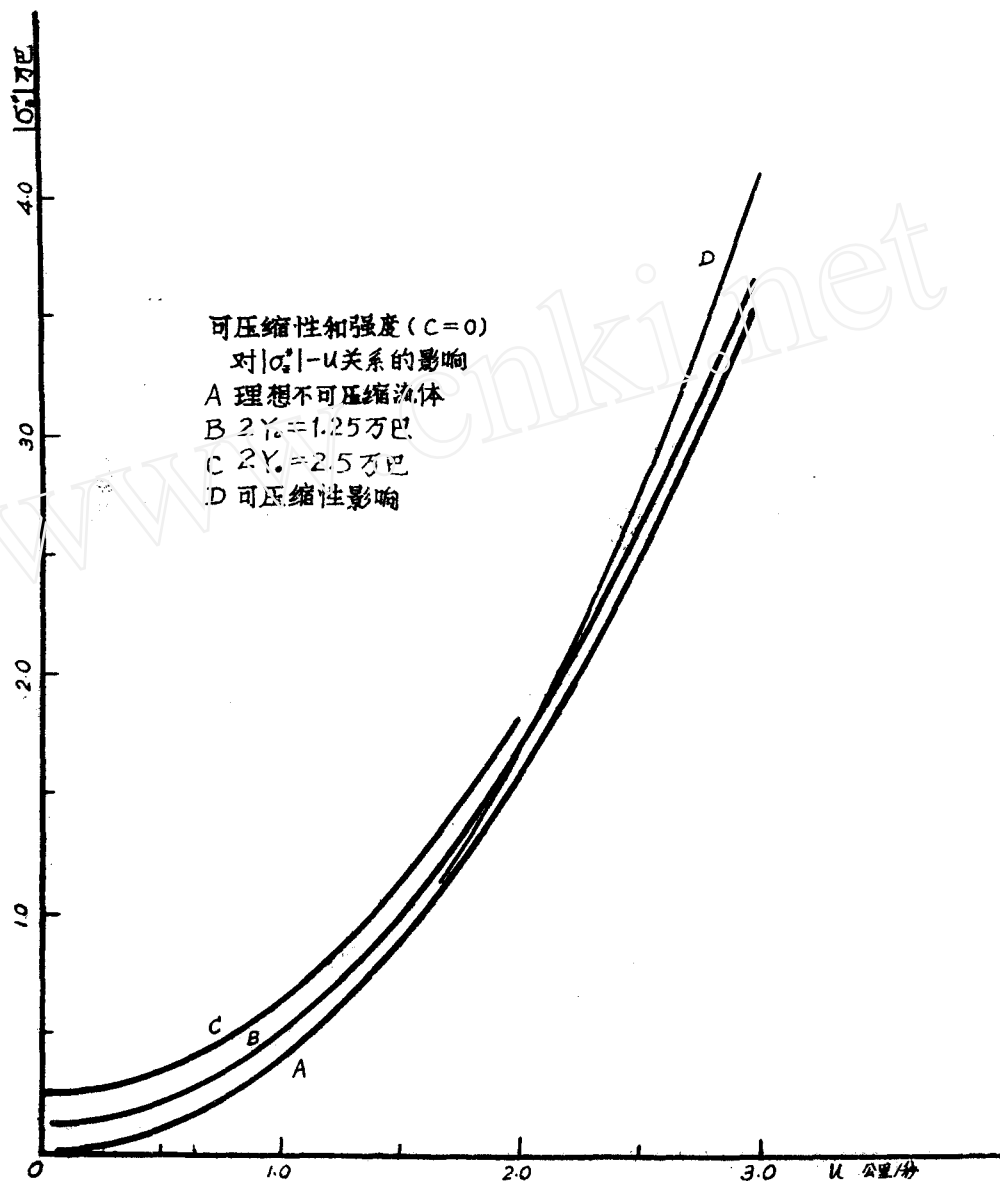


图 4-11

超过漏斗深度，往往可以把问题简化为定常侵彻，定常侵彻的深度占总侵彻深度的主要部分，当然，在漏斗与定常侵彻区域之间还存在着一个过渡区。

我们首先对可压缩性的影响进行了分析，结果表明，对靶板而言，可压缩性对侵彻速度的影响，只有在侵彻速度很大时才比较显著（参看图 4-12），对钢板而言，在  $u \leq 2$  公里/秒时，可以忽略不计。但是在理想可压缩流体理论的基础上，不可能对定常侵彻温度做出正确的估计。

然后，在忽略可压缩性的条件下，对靶板材料的强度因素进行了分析。在  $S$  足够小的情况下，以理想不可压缩流体理论作为零次近似，可以看出，提高装甲抗侵彻能力的途径是提

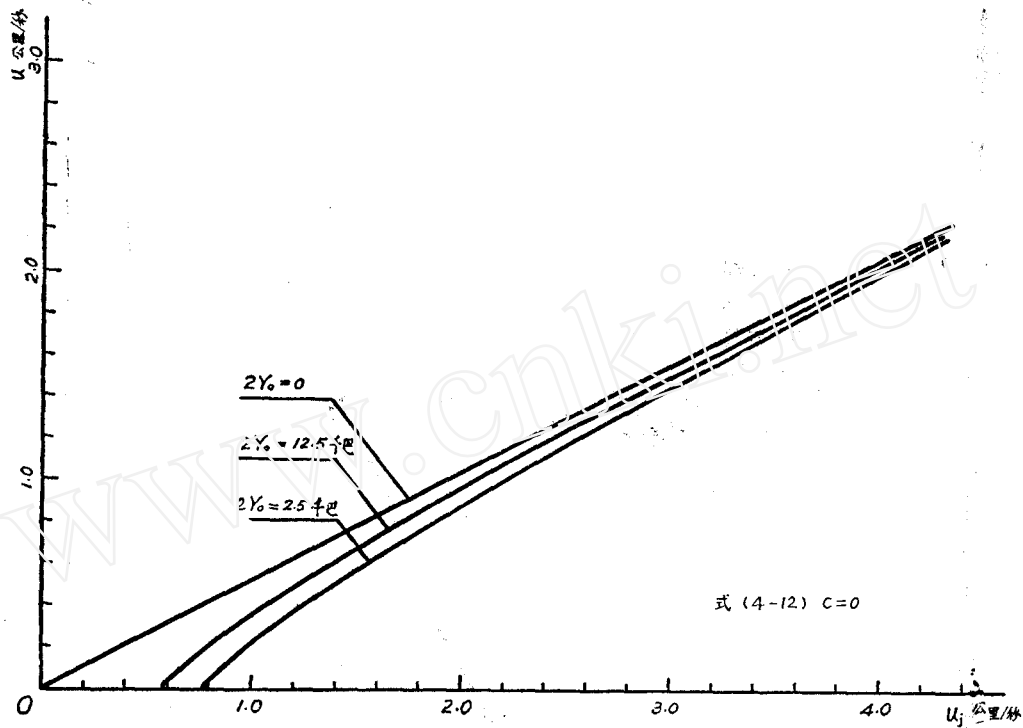


图 4-12

高  $Y_0$ ,  $\alpha$  和  $\gamma$  并降低  $\frac{Y_0}{\rho C_v T_{M0}}$ 。

我们对靶板的  $|\sigma^*| - u$  关系进行了一些初步的探讨。艾歇尔贝格的经验公式与我们所得到的公式的前两项基本相同。但是, 我们认为若只取前两项, 从试验与理论的角度看还有不少缺陷。因此  $|\sigma^*| - u$  关系是一个仍然需要深入研究的问题。

还有许多重要的问题, 如脆性开裂问题, 孔径问题, 极限侵彻速度问题等需要着重研究。

加强对高速高压条件下材料力学性质的研究, 对侵彻过程作更深入、准确的观测, 加强流体—弹塑性理论模型和计算方法的研究, 我们认为完全有可能比较彻底地解决侵彻机理问题, 从而为防护装甲的设计提供坚实的理论依据。同时这种理论对破甲弹的设计也将是有用的。

### 参 考 文 献

- [32] Kinslow, R., High Velocity Impact Phenomena, Academic Press, New York and London (1970).
- [33] 高举贤, 射流侵彻机理, 科技情报 (中国科学院力学研究所), 1972年第4期。
- [34] Pracht and Harlow, *Physics of Fluids*, 9, 10, 1951 (1966)