关于运动稳定性理论研究进展

清华大学　王照林

一、内　容　簡　介

1．严格地说，任何一个力学和物理系统都有运动稳定性的问题。运动稳定性理论研究某些干扰作用对运动状态的影响，从而建立判别运动状态是稳定的或不稳定的法则。我们仅就Ляпунов第二方法（直接法）的某些发展及其应用作一个简单的介绍。

19世纪末，由于生产技术的需要和数学、天体力学的发展，在Poincaré理论的基础上产生了Ляпунов的运动稳定性理论。它从理论上对运动稳定性问题作了严格的论证和系统的分析。其第二方法是定性的方法，由于它近年来在控制系统、陀螺力学、航空和宇宙飞行方面的广泛应用，受到越来越大的重视和进一步的研究。

2．第二方法在严格的分析概念的基础上，建立了运动稳定性的基本定理，即稳定的定理、渐近稳定的定理和不稳定的定理等。

设受扰运动微分方程可以化为正则形式：

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)\quad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

其中X_s是x_1，…，x_n的全纯函数，其系数为已知的时间t的函数，而且当变量x_s全为零时，X_s变为零。

考虑给定在区域

$$t\geqslant t_0>0,\quad \sum_s x_s^2\leqslant H\quad (t_0,\ H\text{是常量，且}H\neq 0)$$

內的实变量t，$x_1,\cdots,x_n$的实函数 $V(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$，并假定该函数是单值、连续的，而当$x_s$全为零时变为零。

定理Ⅰ：如果对于受扰运动微分方程，可以找到定号函数 $V(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$，而由于这些方程，使得它的导数

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_s\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s$$

成为与V符号相反的常号函数，或恒等于零，则无扰运动是稳定的。

定理Ⅱ：如果在满足定理Ⅰ的条件下，定号函数V具有无穷小上界，而它的导数$\frac{dV}{dt}$是反号的定号函数，则无扰运动是渐近稳定的。

定理Ⅲ：如果存在具有无穷小上界的函数 $V(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$，由于受扰运动微分方程，使得它的导数$\frac{dV}{dt}$是定号的函数，而函数$V$本身在随意小的$x_s$值和随意大的$t$值时，可以取与它的导数同符号的值，则无扰运动是不稳定的。

定理Ⅱ可以认为是定理Ⅰ的补充。Ляпунов曾证明过两个不稳定的定理，定理Ⅲ是其中之一，但它有一个非常大的缺点，即它要求V必须在$t\geqslant t_0>0$，$\sum_s x_s^2\leqslant H$全部区域内具有一定的性质。其实，对于不稳定性的证明，只需知道某些部分区域内的性质就够了。而著名的Четаев不稳定的定理就是上述定理的推广。上述两个不稳定的定理可以看做是Четаев定理的推论。从这些基本定理出发，可以求出定常运动和非定常运动按一次近似的稳定准则。有些问题则归结为特征根和特征数的进一步的研究[1,2]。

满足上述定理的函数V称为Ляпунов函数，目前尚无建立它的统一法则[6,25]。

二、运动稳定性理論的某些研究

1．运动稳定性基本理论的研究是从苏联开始的，接着是法国，而美国是在1947年以后才比较注意，当前比较广泛注意。苏联的研究单位有莫斯科大学、苏联科学院力学研究所、喀山大学、喀山航空学院，以及新西伯利亚等研究中心。美国有加利福尼亚大学、新西纳特大学、福兰克林工学院、斯坦福大学，以及国家航空与宇宙航行局等研究中心。德、法等国最近也有一些研究成果。我国有中国科学院数学研究所、北京大学、清华大学、东北工学院、西北工业大学等，有的单位是结合最优控制方面的基本理论进行研究。

2．Н．Г．Четаев等对运动稳定性的基本理论做了比较深刻的分析与研究。例如，人们熟知的Четаев不稳定的定理，利用首次积分的线性组合求出了刚体绕定点运动的Lagrange情况运动稳定性的充要条件，利用Hamilton-Jacobi方程的全积分研究Lagrange逆定理，关于Lagrange-Dirichlet，Routh和Lord Kelvin定理的严格统一的证明和其逆定理的某些证明，关于腔内全充理想流体物体运动稳定性的研究，以及非定常运动特征数的研究等等，都是对运动稳定性理论的进一步发展和创造[2-4]。

3．И．Г．Малкин，К．П．Персидский和J．L．Massera等对基本定理的分析与推广也比较有意义，这对于建立一些重要的一般性定理很有帮助。例如，在定理Ⅱ中如以偏导数有界来代替V具有无穷小上界的条件，则不仅在Ляпунов意义下是稳定的，并且能保证更强的稳定性，即在经常干扰作用下的稳定。另外，对上述基本定理的逆定理也做了进一步的研究，其结果是：定理Ⅰ不可逆（对二阶系统定常运动）；定理Ⅱ是可逆的（对定常及周期运动）；但对于非定常运动即使是线性系统，定理Ⅱ也是不可逆的。至于不稳定性定理可逆性的证明现在还沒有看到过[5,6][31,32][18,19]。

4．А．И．Лурье，А．М．Летов等对非线性调节系统的运动稳定性问题做了比较深入的研究。

R．E．Kalman，J．E．Bertram等结合控制系统的稳定性的研究（连续时间和离散时间系统），使第二方法的应用已成为目前动态系统中解决运动稳定性比较普遍的方法[7,8][33,34][22]。

5．В．В．Румянцев，Н．Н．Моисеев等在Жуковский全充理想流体等效刚体研究的基础上，对腔内非全充粘性液体运动稳定性的问题做了许多有成效的研究。因为它是无穷多自由度和非线性的命题，所以这类问题的解是十分困难的。但可以对某些有限的物理量（对部分变量）研究其运动稳定性，这样就可以有效地利用第二方法。另外还可以利用天体力学中关于旋转流体平衡外形的研究成果，结合Lagrange和Routh定理去研究问题，对于各

类动平衡的稳定性问题就是这样解决的[9-13][29,30][35]。

腔内非完全充液以及带有弹性构件腔内充液物体运动稳定性问题，对于火箭、人造卫星、腔内充液陀螺等运动稳定性的研究有重要的现实意义，所以近二十年来有了较大的发展[16][43]。

6．近代工程技术提出许多重要的课题，例如，有随机输入或干扰下的稳定性问题，大范围或全局稳定性问题，时滞系统的稳定性问题，有限区间上的稳定性问题，继电器控制系统的稳定性问题，最优稳定问题（最快过度过程问题），以及二运动物体相遇的“博弈”问题等等[17][20,21][23,24][26,27]。

7．利用直接法，最近几年在解决“可挠卫星高速旋转的运动稳定性”方面有了一些发展。这类系统通常称为“混合系统”。从理论上讲，有些结果可以直接从腔内充液物体运动的研究中推出[36-38]。

近几年来，在人造卫星上不用陀螺而用复摆（或双复摆）做姿态传感器；利用 Ляпунов 稳定性理论去研究该类传感器的运动稳定性问题是比较有效的[41,42]。

三、 結 束 語

综上所述，当前运动稳定性的研究是在基础理论和应用两个方面同时进行的。特别是结合新技术的研究就更加广泛。苏、德比较重视基础理论的研究，而美国次之；但美国关于运动稳定性在控制系统、航空和空间新技术方面的应用，却有不少成果。例如，美国在研究人造卫星复摆姿态传感器的运动稳定性时，曾推证了动平衡状态稳定性的定理，它的条件是：有广义能量首次积分的陀螺无关系统[42]。从理论上讲，其他人对“陀螺无关系统”已解决得比较好，而对“陀螺相关系统”也早有了一些研究成果[2,11][28][44]。

另外，最近利用直接法去研究“带有弹性构件旋转体的运动”时，对常微分方程和偏微分方程的“混合系统”，求出了运动稳定性的充分条件。同样，对基本定理的推证，其他人在研究腔内充液物体运动稳定性的问题时早已解决[9,10]。然而，做为运动稳定性理论在新技术上的应用是值得重视的[36-38]。

最近，有些研究运动稳定性的理论工作者和一些数学研究者，集中了不小的力量于“微分博弈”方面，这在研究宇宙航行和拦截技术上是有现实意义的[14,15][39,40]。

参 考 文 献

〔1〕Ляпунов, А.М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат (1950).

〔2〕Четаев, Н.Г., Устойчивость движения, Гостехиздат(1955).

〔3〕Четаев,Н.Г.,О неустойчивости равновесия, когда силовая функция не есть максимум. Учен. Зап. Казанского Ун-та, Т. 98, Книга 9 (1938).

〔4〕Четаев, Н.Г., О некоторых вопросах, относящихся к задаче об устойчивоти неустановивщихся движиний, ПММ, **24**, Вып. 1 (1960).

〔5〕Малкин, И.Г., Теория устойчивости движения, М., Наука(1966).

〔6〕Малкин, И.Г., О построении функции Ляпунова для системы линейных уравнений, ПММ, **16**, Вып. 2 (1952).

〔7〕Лурье, А.И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат (1951).

〔8〕Летов, А.М., Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Гостехиздат (1955).

〔9〕 Моисеев, Н.Н., Румянцев, В.В., Динамика тела с полостями, содержащими жидкость, М., Наука(1965).
〔10〕 Румянцев, В.В., О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость, ПММ, 33, Вып. 6 (1969).
〔11〕 Румянцев, В.В., Об устойчивости стационарных движений, ПММ, 32, Вып. 3(1968).
〔12〕 Озиранер, А.С., Румянцев, В.В., Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движений относительно части переменных, ПММ, 36, Вып. 2 (1972).
〔13〕 Озиранер, А.С., Об устойчивости положений равновесия твердого тела с полостью, содержащей жидкость, ПММ, 36, Вып. 5 (1972).
〔14〕 Красовский, Н.Н., Субботин, А.И., О структуре игровых задач динамики, ПММ, 35, Вып. 1 (1971).
〔15〕 Пожарицкий, Г.К., Игровая задача импульсной《мягкой》встречи двух материальных точек, ПММ, 36. Вып. 2 (1972).
〔16〕 Рубановский, В. Н., Об устойчивости некоторых движений твердого тела с упругими стержнями и жидкостью, ПММ, 36, Вып. 1 (1972).
〔17〕 Коловский, М.З., Троицкая, З.В., Об устойчивости линейных систем со случайнами параметрами, ПММ, 36, Вып. 2 (1972).
〔18〕 秦元勋，运动稳定性一般问题讲义，科学出版社（1958）.
〔19〕 秦元勋，微分方程所定义的积分曲线，科学出版社（1959）.
〔20〕 秦元勋，刘永清，王联，Влияние запаздывания на устойчивость динамических систем, Тр. IFAC, Т. 1 (1961).
〔21〕 张嗣瀛，Об устойчивости движения на конечном интервале времени, ПММ, 23, Вып.2 (1959).
〔22〕 张嗣瀛，Об одном критерии устойчивости нелинейных регулируемых систем, Автоматика и телемеханика, 20, №5(1959).
〔23〕 张嗣瀛，К теории оптимального регулирования, ПММ, 25, Вып. 3(1961).
〔24〕 张嗣瀛，轨线末端受限制时的最优控制问题，自动化学报，第1卷，第2期（1963）.
〔25〕 蔡燧林，常系数线性微分方程组的Ляпунов 函数公式，数学学报，第9卷，第4期（1959）.
〔26〕 黄琳，关于多维非线性系统衰减时间的估计问题，北京大学学报，自然科学版，№1（1960）.
〔27〕 张德昌，Об условиях неустойчивости систем со запаздываниями, Инженерный журнал, 2, Вып. 4 (1962).
〔28〕 王照林，Об обращении теоремы Рауса, ПММ, 27, Вып. 5(1963).
〔29〕 王照林，Об устойчивости динамических равновесий твердого тела, подвешенного на струне, Диссертация МГУ, Москва (1963).
〔30〕 王照林，Об устойчивости положений динамического равновесия одной механической системы, Инженерный журнал, 5, Вып. 1 (1965).
〔31〕 Massera, J.L., On Liapunov's conditions of stability, *Appl. Math.*, 50(1949).
〔32〕 Massera, J.L., Contributions to stability theory, *Appl. Math.*, 64 (1956).
〔33〕 Kalman, R. E., Bertram, J. E., Control system analysis & design via the "second method" of Liapunov, "continuous-time systems"; "discrete-time systems"; *J. of Basic Engineering*, June (1960) (船舶导航译丛，№1，№2，1972).
〔34〕 Lee, T.H., Hsu, C.S., Liapunov stability criteria for continuous systems under parametric exitation, *Trans. ASME*, E39, №1 (1972).
〔35〕 Stewartson, K., On the stability of a spinning top containing liquid, *J. of Fluid Mechanics*. 5, part 4 (1959).
〔36〕 Meirovitch, L., Nelson, H. D., On the high-spin motion of a satellite containing elastic parts, *J. of Spacecraft & Rockets*, 3, №11(Nov. 1966).
〔37〕 Meirovitch, L., Stability of a spinning body containing elastic parts via Liapunov's direct method, *AIAA J.*, 8, №7 (1970).
〔38〕 Meirovitch, L., A method for the Liapunov stability analysis of force-free dynamical systems, *AIAA J.*, 9, №9 (1971).
〔39〕 Varaiya, P., Lin, J., Existence of saddle points in differential games, *SIAM J. Control*, 7, №1 (1969).

〔40〕 Friedman, A., Differential games with restricted phase coordinates, *J. of Differential Equations*, **8**, №1 (1970) .
〔41〕 Kane, T.R., Athel, S., Dynamic equilibrium of a compound pendulum in an artificial satellite, *AIAA J.*, **9**, №8 (1971).
〔42〕 Likins, P. W., Linearization and Liapunov stability analysis of a class of dynamical differential equations, *AIAA J.*, **10**, №4 (1972).
〔43〕 Magnus, K., Kreisel Theorie und Anwendungen, Springer-Verlag, Berlin (1971).
〔44〕 Hogedorn, P., Die Umkehrung der Stabilitätssätze von Lagrange-Dirichlet und Routh, *Archive for Rational Mechanics And Analysis*, **42**, 4, 281—316 (1971) 〔Механика, **5**, 135 (1972)〕.