连续介质分析动力学及其应用

梁立孚† 郭庆勇 宋海燕

哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院, 哈尔滨 150001

摘 要 综述了国内和国外学者研究连续介质分析动力学问题的进展, 阐明了本文主要论述将 Lagrange 方程应用于连续介质动力学的问题. 论文采用 Lagrange-Hamilton 体系, 分别论述了非保守非线性弹性动力学、不可压缩黏性流体动力学、黏弹性动力学、热弹性动力学、刚 – 弹耦合动力学和刚 – 液耦合动力学的 Lagrange 方程及其应用. 论述了应用 Lagrange 方程建立有限元计算模型的问题. 最后, 展望了将 Lagrange 方程应用于连续介质动力学问题的研究前景.

关键词 连续介质分析动力学, Lagrange 方程, Hamilton 原理, Lagrange-Hamilton 体系

中图分类号: O31 **文献标识码**: A DOI: 10.6052/1000-0992-17-019

收稿日期: 2017-09-27; 录用日期: 2018-03-19; 在线出版日期: 2018-04-25

† E-mail: lianglifu@hrbeu.edu.cn

引用方式: 梁立孚, 郭庆勇, 宋海燕. 连续介质分析动力学及其应用. 力学进展, 2019, 49: 201908

Liang L F, Guo Q Y, Song H Y. Analytical dynamics of continuous medium and its application. *Advances in Mechanics*, 2019, 49: 201908

1 引 言

连续介质力学研究连续介质的宏观力学行为. 连续介质力学用统一的观点来研究固体和流体的力学问题. 按连续统一的观点 (爱林根 1991, 爱林根 1985, Eringen 1962) 研究电磁场与连续介质的相互作用.

客观上, 连续介质力学已经分成为以研究线性连续介质理论为主的古典连续介质力学和以研究非线性连续介质理论为主的近代连续介质力学. 而近代连续介质力学又可分为理性连续介质力学和计算连续介质力学, 前者按理性力学的观点和方法研究连续介质理论, 后者把连续介质力学和电子计算机结合起来.

分析力学建立在虚功原理和达朗贝尔原理的基础上. 1788 年 Lagrange 出版的不朽名著《Mécanique Analytique》是世界上最早的一本分析力学的著作 (Lagrange 1788). 1760—1761 年, 拉格朗日把这两个原理和理想约束结合, 得到了动力学的普遍方程, 几乎所有的分析力学的动力学方程都是从这个方程直接或间接导出的. 逐步形成分析动力学的 Lagrange 体系, 其核心是 Lagrange 方程.

1834 年和 1843 年 Hamilton 分别建立了 Hamilton 原理和正则方程 (Hamilton 1835), 把分析力学推进一步. Hamilton 用代表一个系统的点的路径积分的变分原理研究各类力学问题. 它的优点是可以推广到新领域和应用变分学中的近似法来解题. 逐步形成分析动力学的 Hamilton 体系, 其核心是 Hamilton 原理.

由于 Hamilton 原理具有便于应用于其他学科和可以应用变分原理的直接方法进行近似计算的优点, 使得 Hamilton 原理在固体动力学、刚体动力学、流体动力学、电动力学、控制理论、量子力学、统计物理学等学科都有重要的应用, 相关的研究成果非常丰富, 限于篇幅, 这里仅介绍连续介质力学的 Hamilton 原理的国外部分近期研究情况. Zenkour (1989) 建立了各向异性弹性体的混合型 Hamilton 变分原理; Gouin (2008) 基于 Hamilton 原理, 建立了连续介质力学的混合型变分原理; Lyakhov (1992) 建立了基于 Hamilton 原理的锚链动力学的变分原理; Maximov (2010) 对耗散性水动力学中的 Hamilton 型变分原理及其应用进行了研究; Kim 等 (2013) 建立了连续介质动力学的修正型 Hamilton 原理; Hanyga 和 Seredyńska (2008) 建立了黏弹性力学的 Hamilton 型和 Lagrange 型理论; Fahrenthold 和 Koo (1999) 给出了黏性可压缩流体动力学的离散型 Hamilton 方程; Granados (1998) 应用 Hamilton 原理建立了非保守和多维空间的变分原理; Yang 和 Liu (2017) 把 Lagrange 方程中的自由能代替弹性体的应变能, 建立了非弹性体的 Hamilton 原理; Altay 和 Dokmeci (2005) 应用 Hamilton 原理建立了三场变分原理等. 由于 Hamilton 原理的重要性和应用领域的广泛性, 学术界对 Hamilton 原理的研究已经比较充分, 但将 Lagrange 方程应用于连续介质动力学问题的研究比较欠缺, 因此本文重点介绍将 Lagrange 方程应用于连续介质动力学问题. 加强对将 Lagrange

方程应用于连续介质动力学问题的研究, 目的是开发 Lagrange 方程的重要性和应用领域的广泛性.

如何将 Lagrange 方程应用于弹性动力学的问题, 一直是各国学者关注的研究课题. 我国学者的研究是卓有成效的, 注意到将分析力学从质点刚体力学扩展到弹性力学、从离散系统扩展到连续系统的问题, 锲而不舍地研究将 Lagrange 方程应用于弹性动力学 (汪家訸 1958, 沈惠川 1998, 王琪和陆启韶 2001, 陈滨和梅凤翔 1994, 梅凤翔等 1996, 陈滨 2010, 梅凤翔 2013a). 国外学者的研究也层出不穷, 近期研究内容涉及 Euler–Bernoulli 梁理论 (Mahmoudkhani 2017), 不同截面形式柱状结构的稳定性问题 (Seiranyan 1984), 各向异性的壳结构 (Zhavoronok 2015), 广义位移量和柯西应力问题 (Souchet 2014), 声振系统 (Kim & Senda 2007), 流致振动分析 (Longatte et al. 2003). 国际知名学者 Goldstein 的著作《Classical Mechanics》(Goldstein et al. 2001), 从第一版到第三版都将此作为一个专题, 研究将 Lagrange 方程应用于弹性动力学的问题, 为解决这个理论难题做出重要贡献, 可以代表部分国际学者对这一领域的研究的历史和现状. 但是, Goldstein 先生在研究中, 采用将弹性直杆离散为串联的弹簧的力学模型, 不能涵盖弹性力学的全貌, 因此还需探索其他途径来解决将 Lagrange 方程应用于连续介质弹性动力学的问题. 本文作者应用变导的概念和运算法则, 研究了 Lagrange 方程中的求导的性质, 进而将 Lagrange 方程应用于线性弹性动力学 (梁立孚等 2015); 冯晓九和梁立孚 (2016) 将这种方法应用于非线性弹性动力学. 应用这种方法也可以将 Lagrange 方程应用于流体力学和电动力学等学科.

关于将 Lagrange 方程应用于流体动力学的问题, 国内和国际学者研究的较少. Lagrange 在其著作《Méanique Analytique》中用了较大篇幅研究流体力学, 可惜的是, 由于当时自然科学发展程度的限制, 这位分析力学大师未能给出适用于流体力学的 Lagrange 方程. 但是, Lagrange 的这些研究工作, 为后来各国学者力图解决这个理论难题打下良好的基础. 近年来, 国际学者对这类问题进行了有益的研究. 例如, Tran-Cong (1996) 研究了无条件约束的流体力学的变分原理; Irschik 和 Holl (2002, 2015) 在连续介质力学的 Lagrange 描述的框架中, 通过弱化 Ritz 近似, 推导出 Lagrange 方程的局部形式; Auffray 等 (2015) 证明了一个固定作用原理适用于毛细流体, 涉及到拉格朗日函数; Hean 和 Fahrenthold (2017) 建立了多尺度热流体力学的离散型 Lagrange 方程. 我国学者对流体力学的变分原理的研究处于领先地位 (Chien 1984, 刘高联 1989, 梁立孚和石志飞 1993). 如本文作者, 应用变导的概念和运算法则, 将 Lagrange 方程应用于理想流体动力学, 推导出理想流体力学的控制方程. 应用 Lagrange-Hamilton 体系, 成功地由不可压缩黏性流体动力学的 Hamilton 型拟变分原理推导出不可压缩黏性流体动力学的 Lagrange 方程, 进而推导出不可压缩黏性流体动力学的控制方程. 还探讨了将 Lagrange 方程应用于可压缩黏性流体动力学问题, 并且推导出可压缩黏性流体动力学

的控制方程. 可以说较全面地解决了如何将 Lagrange 方程应用于流体动力学的问题 (梁立孚和周平 2018).

关于电磁连续介质力学 (含电动力学) 的 Hamilton 原理和 Lagrange 方程的国内和国际的研究进展, 将在本文的第 8 节第 (3) 小节中说明. 关于耦合动力学等学科的 Hamilton 原理和 Lagrange 方程的国内和国际的研究进展, 将在本文的相应的节次中进行.

这里特别指出, 我国学者在 Lagrange 系统的积分理论、对称性与守恒量领域进行了出色的研究 (Mei 2000, 郭永新等 2004, 张毅等 2006, 梅凤翔和尚玫 2000, 张毅和梅凤翔 2004, Mei & Xu 2005, Chen et al. 2008, 蔡建乐和梅凤翔 2008, 梅凤翔 2013b). 这对解决 Lagrange 方程应用于连续介质力学的问题是有力的支持.

如前所述, 同样一个分析力学问题, 既可以采用 Lagrange 体系, 建立问题的 Lagrange 方程来研究, 也可以采用 Hamilton 体系, 建立问题的 Hamilton 原理来研究. 既然如此, 不难认识到, 在 Lagrange 体系和 Hamilton 体系之间必然存在有机联系, 这就是 Lagrange-Hamilton 体系: 对于保守系统, Lagrange 方程是 Hamilton 原理的驻值条件; 对于非保守系统, Lagrange 方程是 Hamilton 型拟变分原理的拟驻值条件 (梁立孚等 2016). 本文采用 Lagrange-Hamilton 体系, 分别论述了非保守非线性弹性动力学、不可压缩黏性流体动力学、黏弹性动力学、热弹性动力学、刚 – 弹耦合动力学和刚 – 液耦合动力学的 Lagrange 方程及其应用. 论述了应用 Lagrange 方程建立有限元计算模型的问题. 最后, 展望了连续介质分析动力学的发展前景.

2 非保守非线性弹性动力学的 Lagrange 方程

本文作者建立了非保守非线性弹性动力学的 Hamilton 原理 (梁立孚等 2015). 在此基础上, 应用 Lagrange-Hamilton 体系, 借助变导的运算, 推导出非保守非线性弹性动力学的 Lagrange 方程, 进而建立非保守非线性弹性动力学的控制方程.

2.1 非保守非线性弹性动力学的 Lagrange 方程

非保守非线性弹性动力学一类变量的拟 Hamilton 原理为

$$\delta \varPi_{\mathrm{H1}} - \delta Q_{\mathrm{H}} = 0 \tag{1}$$

式中

$$\begin{aligned}\varPi_{\mathrm{H1}} = \int_{t_0}^{t_1} \Bigg\{ \iiint\limits_{V} \frac{1}{2}\rho \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \mathrm{d}V - \Bigg[\iiint\limits_{V} \Bigg(A\left(\frac{1}{2}\nabla \boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla + \frac{1}{2}\nabla \boldsymbol{u}\cdot \boldsymbol{u}\nabla\right) - \\ \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}\cdot\boldsymbol{u}\Bigg)\mathrm{d}V - \iint\limits_{S_\sigma} (\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{N}})\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S\Bigg]\Bigg\}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\delta Q_{\mathrm{H}} = \int_{t_0}^{t_1} \iiint_V \boldsymbol{u} \cdot \delta \boldsymbol{f}_{\mathrm{N}} \mathrm{d}V \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \iint_{S_\sigma} \boldsymbol{u} \cdot \delta \boldsymbol{T}_{\mathrm{N}} \mathrm{d}S \mathrm{d}t$$

其先决条件为

$$\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \quad (在 S_u 上) \tag{2}$$

系统的动能为

$$T_{\mathrm{d}} = \iiint_V \frac{1}{2} \rho \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \mathrm{d}V \tag{3}$$

系统的势能为

$$U = \iiint_V \left[A \left(\frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{u} + \frac{1}{2} \boldsymbol{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \nabla \right) - \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} \right] \mathrm{d}V - \iint_{S_\sigma} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u} \mathrm{d}S \tag{4}$$

系统的拟势能为

$$U_{\mathrm{q}} = -\iiint_V \boldsymbol{f}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u} \mathrm{d}V - \iint_{S_\sigma} \boldsymbol{T}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u} \mathrm{d}S \tag{5}$$

非保守系统的余虚功为

$$\delta Q_{\mathrm{H}} = \int_{t_0}^{t_1} \iiint_V \boldsymbol{u} \cdot \delta \boldsymbol{f}_{\mathrm{N}} \mathrm{d}V \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \iint_{S_\sigma} \boldsymbol{u} \cdot \delta \boldsymbol{T}_{\mathrm{N}} \mathrm{d}S \mathrm{d}t \tag{6}$$

其中, $\boldsymbol{u}$ 为位移矢量, $\boldsymbol{f}$ 为保守体力矢量, $\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}$ 非保守体力矢量, $\boldsymbol{T}$ 为保守面力矢量, $\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}$ 非保守面力矢量, ρ 为密度, ∇ 为 Hamilton 算子, S_σ 为应力边界, S_u 为位移边界, V 为空间体积域.

将式 (3) ~ 式 (6) 代入式 (1), 应用 Lagrange-Hamilton 体系, 通过推导拟 Hamilton 原理的拟驻值条件, 可得非保守非线性弹性动力学一类变量的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial \dot{\boldsymbol{u}}} + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{u}} = \iiint_V \boldsymbol{f}_{\mathrm{N}} \mathrm{d}V + \iint_{S_\sigma} \boldsymbol{T}_{\mathrm{N}} \mathrm{d}S \tag{7}$$

用类似的方法可以推导出非保守非线性弹性动力学两类变量的 Lagrange 方程, 不再赘述.

2.2 应用 Lagrange 方程推导非保守非线性弹性动力学的控制方程

根据变导的运算法则和 Lagrange 方程中求导的性质, 推导可得 Lagrange 方程中

的各项, 并代入式 (7), 可得非保守非线性弹性动力学一类变量的控制方程

$$\left.\begin{aligned}&\rho\ddot{\boldsymbol{u}}-\nabla\cdot\left[(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\frac{\partial A\left(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla+\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\nabla\right)}{\partial\left(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla+\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\nabla\right)}\right]-\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0}\\&(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\frac{\partial A\left(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla+\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\nabla\right)}{\partial\left(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla+\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\nabla\right)}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0}\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

先决条件为式 (2).

应用类似方法, 可得非保守非线性弹性动力学二类变量的控制方程, 不再赘述.

以上问题的详细推导过程, 可以参阅文献 (周平和梁立孚 2017).

对于 H. H. E. Leipholz 创立伴生力型的非保守系统, 寻找合适的算例是困难的. 本文作者将非保守系统变分原理应用于气动弹性问题 (Liang et al. 2005), 不仅可以解决气动弹性这个技术难题, 而且可以较好地说明伴生力的意义.

3 不可压缩黏性流体动力学的 Lagrange 方程

由于黏性的存在, 使得不可压缩黏性流体动力学成为非保守系统的力学问题. 鉴于不可压缩黏性流体动力学的 Lagrange 方程是不可压缩黏性流体动力学的 Hamilton 型拟变分原理的拟驻值条件, 本节是由不可压缩黏性流体动力学的 Hamilton 型拟变分原理推导出不可压缩黏性流体动力学的 Lagrange 方程, 然后, 再由不可压缩黏性流体动力学的 Lagrange 方程推导出不可压缩黏性流体动力学的控制方程.

3.1 不可压缩黏性流体动力学的 Lagrange 方程

不可压缩黏性流体动力学的 Hamilton 型拟变分原理可以表示为

$$\delta\Pi_1+\delta Q=0\tag{9}$$

式中

$$\Pi_1=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint\limits_V\left[\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}+p\boldsymbol{I}:\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}-\mu\left(\nabla\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}\nabla\right):\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}+\boldsymbol{f}^{\mathrm{q}}\cdot\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}\right]\mathrm{d}V+\iint\limits_{S_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{q}}\cdot\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}t$$

$$\delta Q=\int_{t_0}^{t_1}\left[\iiint\limits_V\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}:\delta\mu\left(\nabla\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}\nabla\right)\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t$$

其先决条件

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{0} \\ &\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}-\bar{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0} \quad (\text{在}S_{\mathrm{w}}\text{上}) \end{aligned}\right. \tag{10}$$

其中, ρ 是密度, 为零阶张量 (标量); $\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}$ 为流体速度矢量 (一阶张量); $\boldsymbol{f}^{\mathrm{q}}$ 为单位体积流体所受的体积力矢量; μ 为黏性系数标量; $\boldsymbol{I}$ 为二阶单位张量; p 为流体压强, 为零阶张量 (标量); $\boldsymbol{n}^{\mathrm{q}}$ 为流体边界面单位外法向矢量; $\boldsymbol{T}^{\mathrm{q}}$ 为流体所受的面积力矢量; $\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}$ 为流体位移矢量. ∇ 为梯度算子 (又称 Hamilton 算子). S_{w} 为固壁边界面, S_{f} 为自由表面.

系统的动能为

$$T_{\mathrm{d}}=\iiint\limits_V \frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}\mathrm{d}V \tag{11}$$

系统的势能为

$$U=\iiint\limits_V\left(-p\boldsymbol{I}:\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}-\boldsymbol{f}^{\mathrm{q}}\cdot\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}\right)\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{q}}\cdot\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}\mathrm{d}S \tag{12}$$

将黏性阻力引起的流体剪切应力视为非保守广义力, 表示为

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{q}}=\mu\left(\nabla\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}\nabla\right) \tag{13}$$

则系统的拟势能为

$$U_{\mathrm{N}}=\iiint\limits_V\mu\left(\nabla\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}\nabla\right):\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}\mathrm{d}V=\iiint\limits_V\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{N}}:\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}\mathrm{d}V \tag{14}$$

非保守系统的余虚功为

$$\delta Q=\int_{t_0}^{t_1}\left[\iiint\limits_V\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}:\delta\mu\left(\nabla\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}\nabla\right)\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\left[\iiint\limits_V\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}:\delta\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t \tag{15}$$

将式 (11) ~ 式 (15) 代入式 (9), 应用 Lagrange-Hamilton 体系, 通过推导拟 Hamilton 原理的拟驻值条件, 并考虑到边界条件 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}-\bar{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0}$, 可得不可压缩黏性流体动力学的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}}+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}-\iiint\limits_V\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}V+\iint\limits_{S_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{N}}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0 \tag{16}$$

详细的推导过程参见 (梁立孚和周平 2018).

3.2 应用 Lagrange 方程推导黏性流体动力学的控制方程

根据变导的运算法则和 Lagrange 方程中求导的性质, 推导可得 Lagrange 方程中的各项, 并代入式 (16), 可得不可压缩黏性流体动力学控制方程

$$\left.\begin{aligned} &\rho\dot{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{q}}+\nabla\cdot\left[p\boldsymbol{I}-\mu\left(\nabla\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}\nabla\right)\right]-\boldsymbol{f}^{\mathrm{q}}=\boldsymbol{0} \\ &-p\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{n}+\mu\left(\nabla\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}\nabla\right)\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{T}^{\mathrm{q}}=\boldsymbol{0} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

不可压缩黏性流体动力学控制方程 (17) 与其先决条件 (10) 构成封闭的微分方程组. 详细的推导过程参见梁立孚和周平 (2018) 的文章.

这部分内容的应用范围较广, 在航空、航天、航海等领域都有重要的应用.

但要注意一个问题, 第 1 节中的非保守力为 Leipholz 伴生力, 第 2 节中的非保守力为黏性阻力, 这两节的 Hamilton 型变分原理中的非保守力的表示形式不同. 其实, 第 2 节非保守力也可以写为第 1 节的形式, 周平等 (2009) 的算例便说明了这个问题.

4 黏弹性动力学的 Lagrange 方程

黏弹性体可以理解为是弹性体与液体的混合物. 在黏弹性体发生应变的时候, 其中的弹性部分承担静态的应力, 而液体部分不承担静态的应力. 当应变对时间的导数不为零的时候, 液体部分由于存在微观摩擦, 出现黏度, 而承担动态的应力. 因此, 一个静态的黏弹性体与一个纯弹性体相当. 本节以一类变量问题为例来讨论问题.

我国学者对黏弹性力学的理论、方法和应用等方面进行了充分的研究 (杨挺青 1990, 罗恩 1990, 程昌钧和朱正佑 2003), 例如, 黏弹性问题的数学模型、黏弹性结构的变分原理与对应原理、求解黏弹性问题的计算方法、黏弹性结构的动力学行为与动力稳定性、黏弹性介质的散射和逆散射问题等. 本文作者建立了非保守黏弹性动力学的拟 Hamilton 原理和 Lagrange 方程 (周平和梁立孚 2017).

黏弹性动力学的本构方程由弹性和黏性两部分组成, 弹性部分服从广义胡克定律, 黏性部分服从广义牛顿黏性定律. 应用 Kelvin 模型, 黏弹性本构关系表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{a} : \left(\frac{1}{2}\nabla \boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla\right) + \mu\left(\nabla\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}\nabla\right) \quad (\text{一类变量}) \tag{18}$$

4.1 非保守黏弹性动力学的 Lagrange 方程

非保守黏弹性动力学一类变量的拟 Hamilton 原理为

$$\delta \varPi_{\mathrm{H1}} - \delta Q_{\mathrm{H}} = 0 \tag{19}$$

式中

$$\varPi_{\mathrm{H1}} = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint\limits_V \frac{1}{2}\rho\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}V - \left\{\iiint\limits_V \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla\right) : \boldsymbol{a} : \left(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla\right) + \mu\left(\nabla\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}\nabla\right) : \nabla\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}\cdot\boldsymbol{u}\right]\mathrm{d}V - \iint\limits_{S_\sigma}\left(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}\right)\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S\right\}\right\}\mathrm{d}t$$

$$\delta Q_{\mathrm{H}} = \int_{t_0}^{t_1}\iiint\limits_V \left[\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}} - \nabla\boldsymbol{u} : \delta\mu\left(\nabla\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}\nabla\right)\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1}\iint\limits_{S_\sigma}\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

其先决条件为式

$$\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}=\mathbf{0}\quad(\text{在}S_u\text{上})\tag{20}$$

这就是非保守黏弹性动力学一类变量的拟 Hamilton 原理.

系统的动能为

$$T_{\mathrm{d}}=\iiint\limits_V\frac{1}{2}\rho\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}V\tag{21}$$

系统的势能为

$$U=\iiint\limits_V\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla\right):\boldsymbol{a}:\left(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla\right)-\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}\right]\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_\sigma}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S\tag{22}$$

将黏性阻力引起的流体剪切应力视为非保守广义力, 表示为

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{N}}=\mu\left(\nabla\dot{\boldsymbol{u}}+\dot{\boldsymbol{u}}\nabla\right)\tag{23}$$

则系统的拟势能为

$$U_{\mathrm{q}}=\iiint\limits_V\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{N}}:\nabla\boldsymbol{u}\mathrm{d}V-\iiint\limits_V\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_\sigma}\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S\tag{24}$$

非保守系统的余虚功为

$$\delta Q_{\mathrm{H}}=\int_{t_0}^{t_1}\iiint\limits_V\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}V\mathrm{d}t+\int_{t_0}^{t_1}\iint\limits_{S_\sigma}\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}S\mathrm{d}t-\int_{t_0}^{t_1}\left[\iiint\limits_V\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}:\delta\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t\tag{25}$$

将式 (21) ~ 式 (25) 代入式 (19), 应用 Lagrange-Hamilton 体系, 通过推导拟 Hamilton 原理的拟驻值条件, 可得非保守黏弹性动力学一类变量的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial\dot{\boldsymbol{u}}}+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{u}}-\iiint\limits_V\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}V+\iint\limits_{S_\sigma}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{N}}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}V+\iint\limits_{S_\sigma}\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}S\tag{26}$$

4.2 应用 Lagrange 方程推导非保守黏弹性动力学的控制方程

根据变导的运算法则和 Lagrange 方程中求导的性质, 推导可得 Lagrange 方程中的各项, 并代入式 (26), 可得非保守黏弹性动力学控制方程

$$\left.\begin{array}{l}\rho\ddot{\boldsymbol{u}}-\nabla\cdot\left[\dfrac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\nabla):\boldsymbol{a}+\mu\left(\nabla\dot{\boldsymbol{u}}+\dot{\boldsymbol{u}}\nabla\right)\right]-\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}=\mathbf{0}\\ \left[\left(\dfrac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla\right):\boldsymbol{a}+\mu\left(\nabla\dot{\boldsymbol{u}}+\dot{\boldsymbol{u}}\nabla\right)\right]\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}=\mathbf{0}\end{array}\right\}\tag{27}$$

先决条件为式 (20).

详细的推导过程参见周平和梁立孚 (2017) 的文章.

这部分内容的应用范围很广, 例如可以分析柱、梁、薄板等结构的稳定性和混沌运动, 揭示出系统的一些动力学性质. 固体火箭发动机的火药柱, 是典型的黏弹性材料, 在固体火箭发动机的火药柱的 (静) 动力强度计算中, 黏弹性动力学的 Lagrange 方程和 Hamilton 原理是大有用武之地的. 还可以建立刚 – 黏弹性耦合动力学的 Hamilton 原理和 Lagrange 方程, 应用于航空、航天、航海和机器人动力学.

5 热弹性动力学的 Lagrange 方程

航天科学技术向着更高更快的方向发展, 高超声速飞行器逐步成为研究的热点. 这类飞行器的飞行马赫数高, 气动加热效应大, 在飞行过程中承受着严酷的气动力和气动热载荷. 高温环境会降低结构的材料性能, 使结构产生热应力、热变形、热屈曲等, 改变结构的动力学特性. 因此, 需要开展一系列高温环境下飞行器结构动力学理论分析与试验研究. 我国是一个航天大国, 我国学者在热弹性动力学方面做出了重要贡献 (杨炳渊等 2008, 范绪箕 2009, 闵桂荣和郭舜 1998, 刘锦阳和洪嘉振 2006). 本文作者建立了线性和非线性刚 – 热弹耦合动力学的 Hamilton 原理, 并且应用于研究结构的热弹耦合稳定性问题 (冯晓九等 2016) 和所谓热力刚化问题 (Song et al. 2015).

众所周知, 结构的热效应主要体现在两个方面, 一是引起结构材料的性能降低, 一是引起热应力. 本文在同时考虑这两种热效应的情况下来讨论问题.

5.1 非保守系统热弹性动力学的 Lagrange 方程

非保守热弹性动力学一类变量的拟 Hamilton 原理为

$$\delta \varPi_{\mathrm{H1}} - \delta Q_{\mathrm{H}} = 0 \tag{28}$$

式中

$$\begin{gathered}
\varPi_{\mathrm{H1}} = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iiint_V \frac{1}{2}\rho \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \mathrm{d}V - \left[\iiint_V \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\nabla \boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla \right) : \left(\boldsymbol{a} + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial T_{\mathrm{d}}} \Delta T_{\mathrm{d}} \right) : \right.\right.\right. \\
\left(\frac{1}{2}\nabla \boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla \right) - \boldsymbol{I}\alpha \Delta T_{\mathrm{d}} : \left(\boldsymbol{a} + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial T_{\mathrm{d}}} \Delta T_{\mathrm{d}} \right) : \left(\frac{1}{2}\nabla \boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla \right) - \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u} \Bigg) \mathrm{d}V - \\
\left.\left. \iint_{S_\sigma} (\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}) \cdot \boldsymbol{u} \mathrm{d}S \right] \right\} \mathrm{d}t \\
\delta Q_{\mathrm{H}} = \int_{t_0}^{t_1} \iiint_V \boldsymbol{u} \cdot \delta \boldsymbol{f}_{\mathrm{N}} \mathrm{d}V \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \iint_{S_\sigma} \boldsymbol{u} \cdot \delta \boldsymbol{T}_{\mathrm{N}} \mathrm{d}S \mathrm{d}t
\end{gathered}$$

其先决条件为

$$\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \quad (\text{在} S_u \text{上}) \tag{29}$$

系统的动能为

$$T_{\mathrm{d}}=\iiint_{V}\frac{1}{2}\rho\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}V \tag{30}$$

系统的势能为

$$\begin{aligned}U=\iiint_{V}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla\Big):\Big(\boldsymbol{a}+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial T_{\mathrm{d}}}\Delta T_{\mathrm{d}}\Big):\Big(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla\Big)-\\ \boldsymbol{I}\alpha\Delta T_{\mathrm{d}}:\Big(\boldsymbol{a}+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial T_{\mathrm{d}}}\Delta T_{\mathrm{d}}\Big):\Big(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla\Big)-\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}\Big]\mathrm{d}V-\iint_{S_{\sigma}}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{31}$$

系统的拟势能为

$$U_{\mathrm{q}}=-\iiint_{V}\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}V-\iint_{S_{\sigma}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S \tag{32}$$

非保守系统的余虚功为

$$\delta Q_{\mathrm{H}}=\int_{t_0}^{t_1}\iiint_{V}\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}V\mathrm{d}t+\int_{t_0}^{t_1}\iint_{S_{\sigma}}\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}S\mathrm{d}t \tag{33}$$

将式 (30) ~ 式 (33) 代入式 (28), 应用 Lagrange-Hamilton 体系, 通过推导拟 Hamilton 原理的拟驻值条件, 可得非保守热弹性动力学一类变量的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial\dot{\boldsymbol{u}}}+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{u}}=\iiint_{V}\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}V+\iint_{S_{\sigma}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}S \tag{34}$$

用类似的方法可以推导出非保守系统热弹性动力学两类变量的 Lagrange 方程, 不再赘述.

5.2 应用 Lagrange 方程推导非保守系统热弹性动力学的控制方程

根据变导的运算法则和 Lagrange 方程中求导的性质, 推导可得 Lagrange 方程中的各项, 并代入式 (34), 可得非保守系统热弹性动力学一类变量的控制方程

$$\left.\begin{aligned}&\rho\ddot{\boldsymbol{u}}-\nabla\cdot\Big[\Big(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla\Big):\Big(\boldsymbol{a}+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial T_{\mathrm{d}}}\Delta T_{\mathrm{d}}\Big)-\\&\qquad\boldsymbol{I}\alpha\Delta T_{\mathrm{d}}:\Big(\boldsymbol{a}+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial T_{\mathrm{d}}}\Delta T_{\mathrm{d}}\Big)\Big]-\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0}\\&\Big[\Big(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla\Big):\Big(\boldsymbol{a}+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial T_{\mathrm{d}}}\Delta T_{\mathrm{d}}\Big)-\\&\qquad\boldsymbol{I}\alpha\Delta T_{\mathrm{d}}:\Big(\boldsymbol{a}+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial T_{\mathrm{d}}}\Delta T_{\mathrm{d}}\Big)\Big]\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0}\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

先决条件为式 (29).

应用类似方法, 可得非保守热弹性动力学两类变量的控制方程.

6 非保守非线性刚 – 弹耦合动力学的 Lagrange 方程

为适应航天工程的迅猛发展的需要, 出现了多柔体动力学的新兴学科. 由于多柔体构形的复杂性, 直到 2000 年, 解决多柔体动力学问题主要是依赖于数值的、定量的分析方法, 几乎没有进行解析的分析讨论, 这对于深刻把握系统的非线性力学实质、预测系统的全局动力学现象是十分不利的. 因此, 极有必要开展多柔体系统的理论分析, 当然, 这是一个十分复杂的问题, 解决它可能需要很长的时间 (马兴瑞等 2001).

国内外学者在研究多柔体动力学的过程中, 多数是将多柔体动力学处理为刚 – 弹耦合动力学. 围绕这个重要课题, 本文作者开展了一些研究工作 (Liang et al. 2009, 梁立孚 2011b, Liang & Song 2013). 研究表明, 由于航天动力学是耦合动力学, 应用分析动力学来研究是一个有效的途径. 我们利用分析力学是用对能量与功的分析代替对力 (及其相应的位移) 与力矩 (及其相应的角位移) 的分析的特点, 根据问题的物理背景, 应用功能转换原理和能量守恒定律, 正确建立耦合运动的动能和势能 (如果是非保守系统, 还要建立非保守力的余虚功), 进而应用 Hamilton 型变分原理来研究耦合动力学. 在此基础上, 应用 Lagrange 方程开展研究工作, 在梁立孚等 (2016) 的专著中, 进行了较为系统的研究工作, 其部分内容体现在冯晓九等 (2016) 的研究中. 以下扼要介绍这方面的工作.

6.1 刚 – 弹耦合动力学的 Lagrange 方程

如果认为作用在变形体上的外力既有保守力又有非保守力, 则导致刚体运动的力 (即作用于质心的主矢和主矩) 同样既有保守力又有非保守力; 应用功能转换原理和能量守恒定律, 可以将非保守非线性刚 – 弹耦合动力学的拟 Hamilton 原理表示为

$$\delta\pi_{\mathrm{H1}} - \delta Q_{\mathrm{H}} = 0 \tag{36}$$

式中

$$\pi_{\mathrm{H1}} = \int_{t_0}^{t_1}\left[\int_m \left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}m + \right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{H}^{\mathrm{c}} - \pi_1 + (\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}})\cdot\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}} + (\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_{\mathrm{N}})\cdot\boldsymbol{\theta}\right]\mathrm{d}t$$

$$\pi_1 = \iiint_V \left[A\left(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla + \frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\nabla\right) - (\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}})\cdot\boldsymbol{u}\right]\mathrm{d}V - \iint_{S_\sigma}(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}})\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S$$

$$\delta Q_{\mathrm{H}} = \int_{t_0}^{t_1}\left[\iiint_V \boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}V + \iint_{S_\sigma}\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}S + (\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}\cdot\delta\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{\theta}\cdot\delta\boldsymbol{M}_{\mathrm{N}})\right]\mathrm{d}t$$

其先决条件为

$$\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}=\mathbf{0}\quad (\text{在}S_u\text{上}) \tag{37}$$

其中, $\boldsymbol{u}$ 为位移, $\bar{\boldsymbol{u}}$ 为边界位移, V 为体积, S_σ 为应力边界面, S_u 为位移边界面, A 为应变能函数, t 为时间, ρ 为质量密度, m 为质量; ∇ 为 Hamilton 算子; $\boldsymbol{f}$ 为保守体力, $\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}$ 为非保守体力, $\boldsymbol{T}$ 为保守面积力, $\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}$ 为非保守面积力, $\boldsymbol{H}^{\mathrm{c}}$ 为对质心的动量矩, 注意, 在这一节中 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{c}}=\boldsymbol{J}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}$, 有时记为 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{J}$ 为对质心的转动惯量. 作用于质心的主矢 $(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}})$ 和主矩 $(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_{\mathrm{N}})$ 既有保守力又有非保守力.

刚 – 弹耦合动力学中的动能可以写为

$$T_{\mathrm{d}}=\int\limits_m\left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}m+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{H}^{\mathrm{c}}=$$

$$\iiint\limits_V\left[\frac{1}{2}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}+\rho\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{H}^{\mathrm{c}} \tag{38}$$

刚 – 弹耦合动力学中的势能可以写为

$$\begin{aligned}U=\pi_1-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\theta}=&\iiint\limits_V\left[A\left(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla+\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\nabla\right)-\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}\right]\mathrm{d}V\\&-\iint\limits_{S_\sigma}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\theta}\end{aligned} \tag{39}$$

非保守系统非线性刚 – 弹耦合动力学的拟势能和余虚功可以表示为

$$U_{\mathrm{q}}=-\iiint\limits_V\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_\sigma}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}S \tag{40}$$

$$\delta Q_{\mathrm{H}}=\int_{t_0}^{t_1}\iiint\limits_V\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}V\mathrm{d}t+\int_{t_0}^{t_1}\iint\limits_{S_\sigma}\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}S\mathrm{d}t \tag{41}$$

将式 (38) ~ 式 (41) 代入式 (36), 应用 Lagrange-Hamilton 体系, 通过推导拟 Hamilton 原理的拟驻值条件, 可得非线性非保守系统刚 – 弹耦合动力学的 Lagrange 方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial\dot{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{c}}}+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}-\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}=\mathbf{0}\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial\dot{\boldsymbol{\theta}}}+\frac{\partial U}{\partial\theta}-\boldsymbol{M}_{\mathrm{N}}=\mathbf{0}\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial\dot{\boldsymbol{u}}}+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{u}}-\iiint\limits_V\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_\sigma}\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}S=\mathbf{0}\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

具体的推导过程参见梁立孚等 (2015) 以及冯晓九等 (2016) 的文章.

6.2 应用刚 – 弹耦合动力学 Lagrange 方程推导其控制方程

根据变导的运算法则和 Lagrange 方程中求导的性质, 推导可得 Lagrange 方程中的各项, 并代入式 (42), 可得一类变量的非线性非保守刚 – 弹耦合动力学的控制方程

$$\left.\begin{aligned}
&\iiint\limits_V \rho\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t^2}\right)\mathrm{d}V-\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0}\\
&-\iiint\limits_V \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0}\\
&\rho\left[\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t^2}\times\boldsymbol{x}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\times\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{x}\right)\right]-\\
&\qquad(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\frac{\partial A\left(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla+\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\nabla\right)}{\partial\left(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla+\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\nabla\right)}\cdot\nabla-\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0}\quad(\text{在}V\text{中})\\
&(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\frac{\partial A\left(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla+\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\nabla\right)}{\partial\left(\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\nabla+\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\nabla\right)}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0}\quad(\text{在}S_\sigma\text{中})
\end{aligned}\right\}\tag{43}$$

先决条件为式 (37).

详细的推导过程参见梁立孚等 (2015) 以及冯晓九等 (2016) 的文章. 应用类似方法可以处理两类变量非保守系统非线性刚 – 弹耦合动力学的 Lagrange 方程的问题, 不再赘述.

本文作者应用刚 – 弹耦合动力学 Hamilton 原理和 Lagrange 方程研究自由梁的振动问题和动力刚化问题, 均取得较好的效果.

7 非保守刚 – 液耦合动力学的 Lagrange 方程

随着航天事业的发展, 特别是大型空间站的建立、空间实验室的出现以及探讨人类长期在宇宙空间居住或者旅行的研究工作的开展, 较全面地研究流体和固体的耦合问题已经提上了日程. 对于这一研究领域, 在航天器充液贮箱液固耦合机理研究和大规模液固耦合模型建模计算的应用研究方面, 国内尚比较欠缺 (王照林和刘延柱 2002, 李青等 2012).

这里的刚 – 液耦合系统模型的简化, 在梁立孚等 (2016) 的文章中做了较为详细的说明. 梁立孚等 (2013) 建立了刚 – 液耦合动力学的拟 Hamilton 原理. 在此基础上, 本文应用 Lagrange-Hamilton 体系, 建立了刚 – 液耦合动力学的 Lagrange 方程, 进而推导出其控制方程.

7.1 刚 – 液耦合动力学的 Lagrange 方程

如果认为作用在液体上的外力既有保守力又有非保守力, 则导致刚体运动的力, 即作用于质心的主矢和主矩同样既有保守力又有非保守力. 应用功能转换原理和能量守恒定律, 一类变量刚 – 液耦合动力学的拟变分原理表示为

$$\delta\pi_{rq1}-\delta Q_{rq1}=0 \tag{44}$$

式中

$$\pi_{\mathrm{rq1}}=\int_{t_0}^{t_1}\left[\iiint\limits_{V}\frac{1}{2}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{J}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}+\right.$$

$$\left.\iiint\limits_{V^{\mathrm{q}}}\rho\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{x}^{\mathrm{q}}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V+\pi_{\mathrm{q1}}+(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}})\cdot\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}+(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_{\mathrm{N}})\cdot\boldsymbol{\theta}\right]\mathrm{d}t$$

$$\pi_{\mathrm{q1}}=\iiint\limits_{V}\left[\frac{1}{2}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t}+p\boldsymbol{I}:\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}-\mu\left(\nabla\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t}\nabla\right):\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}+\right.$$

$$\left.(\boldsymbol{f}^{\mathrm{q}}+\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{q}})\cdot\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}\right]\mathrm{d}V+\iint\limits_{S_\sigma}(\boldsymbol{T}^{\mathrm{q}}+\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{q}})\cdot\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}\mathrm{d}S$$

$$\delta Q_{\mathrm{rq1}}=\int_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}\cdot\delta\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}+\boldsymbol{\theta}\cdot\delta\boldsymbol{M}_{\mathrm{N}})\,\mathrm{d}t-$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint\limits_{V^{\mathrm{q}}}\left[\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}:\delta\mu\left(\nabla\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t}\nabla\right)-\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}\cdot\delta\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{q}}\right]\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_\sigma}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}\cdot\delta\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{q}}\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}t$$

先决条件为

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}=\boldsymbol{0}\quad(\text{在}S_{\mathrm{w}}\text{上}) \tag{45}$$

刚 – 液耦合动力学中的动能可以写为

$$T_{\mathrm{d}}=\int\limits_{m}\left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}m+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{H}^{\mathrm{c}}=$$

$$\iiint\limits_{V}\left[\frac{1}{2}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}+\rho\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{x}^{\mathrm{q}}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{H}^{\mathrm{c}} \tag{46}$$

刚 – 液耦合动力学中的势能可以写为

$$U=\pi_{\mathrm{q}}-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\theta}=\iiint\limits_{V^{\mathrm{q}}}\left[p\boldsymbol{I}:\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}-\mu\left(\nabla\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{q}}\nabla\right):\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}+\boldsymbol{f}^{\mathrm{q}}\cdot\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}\right]\mathrm{d}V+$$

$$\iint\limits_{S_\sigma}\boldsymbol{T}^{\mathrm{q}}\cdot\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}\mathrm{d}S-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\theta} \tag{47}$$

刚 – 液耦合动力学的拟势能和余虚功可以表示为

$$U_{\mathrm{q}}=-\iiint\limits_V \boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}\cdot\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{q}}\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_\sigma}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}\cdot\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{q}}\mathrm{d}S \tag{48}$$

$$\delta Q_{\mathrm{rq}}=\int_{t_0}^{t_1}\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}\cdot\delta\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}+\boldsymbol{\theta}\cdot\delta\boldsymbol{M}_{\mathrm{N}}\right)\mathrm{d}t-$$
$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint\limits_{V^{\mathrm{q}}}\left[\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}:\delta\mu\left(\nabla\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{q}}+\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{q}}\nabla\right)-\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}\cdot\delta\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{q}}\right]\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_\sigma}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}\cdot\delta\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{q}}\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}t \tag{49}$$

将式 (46) ~ 式 (49) 代入式 (44), 应用 Lagrange-Hamilton 体系, 通过推导拟 Hamilton 原理的拟驻值条件, 可得刚 – 液耦合动力学一类变量的 Lagrange 方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial\dot{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{c}}}+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}-\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0}\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial\dot{\boldsymbol{\theta}}}+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{M}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0}\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{q}}}+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}-\iiint\limits_V\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{q}}\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_\sigma}\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{q}}\mathrm{d}S=\boldsymbol{0}\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

7.2 应用刚 – 液耦合动力学 Lagrange 方程推导其控制方程

根据变导的运算法则和 Lagrange 方程中求导的性质, 推导可得 Lagrange 方程中的各项, 并代入式 (50), 可得一类变量的非保守刚 – 液耦合动力学的控制方程

$$\left.\begin{aligned}&\iiint\limits_V\rho\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t^2}\right)\mathrm{d}V-\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0}\\&-\iiint\limits_V\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{x}^{\mathrm{q}}\right)\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0}\\&\rho\left[\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{u}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t^2}\times\boldsymbol{x}^{\mathrm{q}}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\times\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{x}^{\mathrm{q}}\right)\right]-\\&\qquad\left[-\nabla\cdot p\boldsymbol{I}+\nabla\cdot\mu\left(\nabla\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{q}}+\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{q}}\nabla\right)+\boldsymbol{f}^{\mathrm{q}}+\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{q}}\right]=\boldsymbol{0}\quad(\text{在}V\text{中})\\&p\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{n}^{\mathrm{q}}-\mu(\nabla\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{q}}+\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{q}}\nabla)\cdot\boldsymbol{n}^{\mathrm{q}}+\boldsymbol{T}^{\mathrm{q}}+\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{q}}=\boldsymbol{0}\quad(\text{在}S_\sigma\text{中})\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

先决条件为式 (45).

应用类似方法, 可得两类变量非保守刚 – 液耦合动力学的 Lagrange 方程. 在与流体动力学有关的问题中, 有时这一组方程应用起来比较方便.

刚 – 液耦合动力学功能型拟 Hamilton 原理和 Lagrange 方程的建立, 为刚 – 弹 – 液耦合动力学功能型拟 Hamilton 原理和 Lagrange 方程的建立打下基础. 这类研究在航天器充液贮箱液固耦合机理研究和大规模液固耦合模型建模计算方面有重要应用.

8 应用 Lagrange 方程建立有限元模型

在有关文献中 (戴世强等 2001, Pian & Tong 1972, 董平和罗赛托斯 1979, Orlov et al. 2006), 经常可以看到这样的论述: “变分原理作为有限元素法和其他近似计算方法的理论基础, 随着电子计算机的广泛应用, 越来越得到学术界的重视.” 并且, 有限元素法来源于变分直接方法 ——Ritz 法. 人们在研究 Ritz 变分直接方法时发现, 在问题的整个选值域上选择坐标函数, 由于区域大, 选择一个合适的坐标函数有时相当困难, 于是人们产生一个想法: 是否可以将选择域划小, 从而使选择坐标函数变得容易些呢？这便是有限元素法思想的萌芽. 从此, 有限元素法便应运而生了.

本节将说明, 以上应用变分原理能够做到的事情, 应用 Lagrange 方程也可以做到. 以下, 应用 Lagrange 方程建立有限元模型.

8.1 应用 Lagrange 方程建立位移协调元模型

将弹性连续体划分为 N 个单元, 取 u_i 为自变函数, 它们满足如下要求 (见 **图 1**).

(1) 在元素中, u_i 满足 C^0 级连续;

(2) 在无际边界 S_{ab} 上

$$u_i^{(a)} = u_i^{(b)} \tag{52}$$

(3) 在边界 S_u 上

$$u_i^{(a)} = \bar{u}_i^{(a)} \tag{53}$$

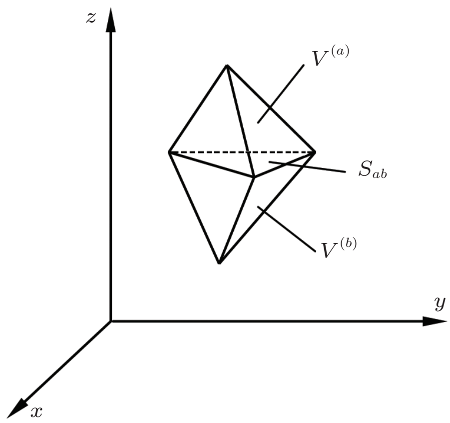

图 1

弹性体单元

则 Lagrange 方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial \dot{u}_i^{(a)}}+\frac{\partial U}{\partial \dot{u}_i^{(a)}}=0 \tag{54}$$

其中

$$T_{\mathrm{d}}=\sum_{a=1}^{N}\iiint\limits_{V^{(a)}}\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i^{(a)}\dot{u}_i^{(a)}\mathrm{d}V \tag{55}$$

$$U=\sum_{a=1}^{N}\left\{\iiint\limits_{V^{(a)}}\left[A\left(u_i^{(a)}\right)-f_i^{(a)}u_i^{(a)}\right]\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_\sigma^{(a)}}T_i^{(a)}u_i^{(a)}\mathrm{d}S\right\} \tag{56}$$

其先决条件为式 (52) 和式 (53). 这里 $A(u_i)$ 为以 u_i 为变量的应变能函数, 对小位移理论

$$A(u_i)=\frac{1}{2}a_{ijkl}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\left(\frac{1}{2}u_{k,l}+\frac{1}{2}u_{l,k}\right) \tag{57}$$

这便是适于有限元计算的 Lagrange 方程, 它提供了有限元计算的位移协调元模型.

8.2 应用 Lagrange 方程建立位移杂交元模型

应用 Lagrange 乘子法, 将式 (52) 和式 (53) 纳入势能的表达式中, 则有

$$U_m=U+\sum_{a=1}^{N}\left[\iint\limits_{S_{ab}}\left(u_i^{(a)}-u_i^{(b)}\right)\lambda_i\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_u^{(a)}}\left(u_i^{(a)}-\bar{u}_i^{(a)}\right)\mu_i\mathrm{d}S\right] \tag{58}$$

应用 Lagrange 方程, 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial \dot{u}_i^{(a)}}+\frac{\partial U_m}{\partial \dot{u}_i^{(a)}}=0 \tag{59}$$

经过一系列的运算, 解得

$$\lambda_i^{(a)}=a_{ijkl}^{(a)}\frac{1}{2}\left(u_{k,l}^{(a)}+u_{l,k}^{(a)}\right)n_j^{(a)} \tag{60}$$

$$\lambda_i^{(b)}=-a_{ijkl}^{(b)}\frac{1}{2}\left(u_{k,l}^{(b)}+u_{l,k}^{(b)}\right)n_j^{(b)} \tag{61}$$

$$\mu_i^{(a)}=a_{ijkl}^{(a)}\frac{1}{2}\left(u_{k,l}^{(a)}+u_{l,k}^{(a)}\right)n_j^{(a)} \tag{62}$$

将式 (60) 和式 (62) 代入式 (58), 可得

$$\begin{aligned}U_m=U+\sum_{a=1}^{N}\Bigg[&\iint\limits_{S_{ab}}a_{ijkl}^{(a)}\frac{1}{2}\left(u_{k,l}^{(a)}+u_{l,k}^{(a)}\right)n_j^{(a)}\left(u_i^{(a)}-u_i^{(b)}\right)\mathrm{d}S+\\&\iint\limits_{S_u^{(a)}}a_{ijkl}^{(a)}\frac{1}{2}\left(u_{k,l}^{(a)}+u_{l,k}^{(a)}\right)n_j^{(a)}\left(u_i^{(a)}-\bar{u}_i^{(a)}\right)\mathrm{d}S\Bigg]\end{aligned} \tag{63}$$

综合以上论述, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial \dot{u}_i^{(a)}}+\frac{\partial U_m}{\partial \dot{u}_i^{(a)}}=0 \tag{64}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&T_{\mathrm{d}}=\iiint\limits_{V^{(a)}}\sum_{a=1}^{N}\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i^{(a)}\dot{u}_i^{(a)}\mathrm{d}V\\
&U_m=U+\sum_{a=1}^{N}\left[\iint\limits_{S_{ab}}a_{ijkl}^{(a)}\frac{1}{2}\left(u_{k,l}^{(a)}+u_{l,k}^{(a)}\right)n_j^{(a)}\left(u_i^{(a)}-u_i^{(b)}\right)\mathrm{d}S+\right.\\
&\qquad\left.\iint\limits_{S_u^{(a)}}a_{ijkl}^{(a)}\frac{1}{2}\left(u_{k,l}^{(a)}+u_{l,k}^{(a)}\right)n_j^{(a)}\left(u_i^{(a)}-\bar{u}_i^{(a)}\right)\mathrm{d}S\right]
\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

这便是适于有限元计算的 Lagrange 方程, 它提供了有限元计算的位移杂交元模型.

所谓位移杂交是指, 在无际边界 S_{ab} 上, 放松了对条件 (52) 的要求, 即原来要求精确满足无际边界条件 (52), 现在只要求近似满足无际边界条件 (52).

这里还有一个问题需要说明, 以上是将式 (60) 代入式 (58) 中, 是否可以将式 (61) 代入式 (58) 中呢? 回答是肯定的. 这里可以用 Lagrange 乘子表达式的不唯一性来解释.

可喜的是, 应用 Lagrange 方程建立位移协调元模型和位移杂交元模型和应用 Hamilton 原理建立位移协调元模型和位移杂交元模型相同. 进一步可以判断, 应用 Lagrange 方程得到的有限元列式与应用 Hamilton 原理得到的有限元列式相同.

9 展望

(1) 连续介质分析动力学在学科性科学研究方面的前景

分析动力学的体系, 有 Lagrange 体系、Hamilton 体系、Lagrange-Hamilton 体系, 还有 Birkhoff 系统 (梅凤翔 2013)、对称性与守恒量体系 (梅凤翔 2004). 可见, 分析力学的体系确实是一个完美的体系 (钟万勰 2002). 全面研究分析动力学的各个体系, 超出了本文的研究范围. 以下, 仅展望连续介质分析动力学在学科性科学研究方面的前景.

1788 年 Lagrange 出版世界上最早的一部分析力学专著《Mécanique Analytique》, 逐步形成分析动力学的 Lagrange 体系, 其核心是 Lagrange 方程. 1834 年和 1843 年 W. R. Hamilton 建立 Hamilton 原理和正则方程, 把分析力学推进一步. 逐步形成分析动力学的 Hamilton 体系, 其核心是 Hamilton 原理. 学术界一般认为 Hamilton 体系的优点是可以推广到新领域和应用变分学中的近似法来解题. 基于这种认识, 在连续介质力学的研究领域中, 对 Hamilton 原理的研究论文远远多于对 Lagrange 方程的研究论文.

通过对 Hamilton 体系的广泛的、深入的研究, 有的学者甚至认为: 理想流体力学, 弹性力学, 电动力学, 量子力学, 广义相对论, 孤子与非线性波动理论, 都可以由 Hamilton 体系来描述.

本文的工作表明, Lagrange-Hamilton 体系把 Lagrange 体系和 Hamilton 体系联系起来, 使得采用 Hamilton 体系能够完成的工作都可以用 Lagrange 体系来完成. 例如, 上面提到理想流体力学可以由 Hamilton 体系来描述; 本文的工作表明, 不仅理想流体力学, 而且不可压缩黏性流体动力学和可压缩黏性流体动力学都可以由 Lagrange 体系来描述. 又例如, 上面提到弹性力学可以由 Hamilton 体系来描述; 本文的工作表明, 线性弹性动力学、非线性弹性动力学和黏弹性动力学都可以由 Lagrange 体系来描述. 不仅如此, 本文作者的研究工作表明, 刚 – 弹耦合动力学、刚 – 液耦合动力学、刚 – 弹 – 液耦合动力学、刚 – 弹 – 热耦合动力学和刚 – 弹 – 液 – 控耦合动力学都是既可以由 Lagrange 体系来描述, 又可以由 Hamilton 体系来描述. 上面提到的电动力学、量子力学、广义相对论、孤子与非线性波动理论, 包括它们构成的耦合学科, 经过认真地、深入地研究, 都是既可以由 Lagrange 体系来描述, 又可以由 Hamilton 体系来描述. 由这些学科的杂交而来的耦合力学, 也应当是如此. 进一步, 还可以研究出 Lagrange 体系的描述与 Hamilton 体系的描述各自的特点. 可见, 这类研究有着广阔的前景. 但是, 由于这类研究涉及的学科繁多, 要实现这种前景, 需要多个学科的学者的共同努力来完成.

(2) 连续介质分析动力学在近似计算研究方面的前景

如前所述, 学术界一般认为 Hamilton 体系的优点是可以推广到新领域和应用变分学中的近似法来解题. (1) 中的论述表明, Lagrange 体系和 Hamilton 体系一样, 也可以推广到新领域. 下面将说明, 与 Hamilton 体系一样, Lagrange 体系也可以应用变分学中的近似法来解题.

本文第 7 节以弹性动力学为例, 研究了应用 Lagrange 方程建立有限元模型的问题. 研究表明, 应用 Lagrange 方程得到的有限元列式与应用 Hamilton 原理得到的有限元列式相同. 我们也曾对流体动力学和刚 – 弹耦合动力学进行同样的研究, 得到同样的结论. 可见, 与 Hamilton 体系一样, Lagrange 体系也可以应用变分学中的近似法来解题.

我们在研究弹性动力学的 Hamilton 原理和 Lagrange 方程时发现, 将 Hamilton 原理和 Lagrange 方程退化到弹性静力学时, 都可以得到 $\delta U = 0$, 这正是弹性静力学变分原理的表达式. 20 世纪 80 年代, 我国曾经出现变分原理的研究热潮, 主要研究弹性静力学的变分原理 ($\delta U = 0$). 这个研究热潮推动了我国弹性静力学的变分原理理论发展, 同时也完善了有限元素法的计算技术, 开发了大量的计算程序. 由本文第 7 节可以

发现, 应用 Lagrange 方程建立有限元模型时, 并不涉及对时间的积分, 便于将弹性静力学有限元素法的计算技术和开发的大量计算程序移植到弹性动力学中. 在这种移植中, 注意将含加速度的项处理为含惯性力的项.

这里还可以进一步展望: 在展望 (1) 中提到, "还可以研究出 Lagrange 体系的描述与 Hamilton 体系的描述各自的特点". 经过长期的研究, Hamilton 体系的描述的特点已经开发的比较充分. 我们可以预言, 经过长期的研究, Lagrange 体系的描述的特点也可以逐渐开发出来. 例如 "应用 Lagrange 方程建立有限元模型时, 并不涉及对时间的积分, 便于将弹性静力学有限元素法的计算技术和开发的大量计算程序移植到弹性动力学中", 这便是 Lagrange 体系的描述的特点之一.

(3) 电磁连续介质分析动力学

电磁连续介质理论研究的是电磁场与连续介质的相互作用. 以往 Maxwell 和 Lorentz 关于电磁理论的研究都是建立在电磁介质不变形的基础上的. 由于电磁元器件在使用过程中都会发生变形, 许多情况下还和温度场耦合在一起, 因此在变形介质中研究电磁连续介质理论, 越来越受到学术界的重视. 对于磁流体连续介质理论, 实际上是等离子体流体力学. 这类研究在航空和航天等高科技中有重要应用 (Dmitriy et al. 2007, Patel et al. 2007). 对于电磁固体介质, Kuang (2014) 严格按照连续介质力学的方法系统地研究了变形电介质中的电场和机械力的作用, 并基于电介质的物理变分原理, 进一步建立了电介质的 Hamilton 原理. 梁立孚 (2011b) 应用变积方法, 建立了电磁场理论和压电力学的的变分原理和广义变分原理. Zheng 等 (2010) 建立了电动力学中电磁场的广义 Hamilton 原理. 黄彬彬等 (2000) 等应用变积方法, 建立了压电材料 Hamilton 原理和各级广义 Hamilton 原理. Song 等 (2013) 应用变积方法, 建立了压电体两类变量和三类变量的对偶形式的 Hamilton 原理. 王作君等 (2011) 建立了电磁弹性动力学初边值问题 12 类变量广义 Hamilton 原理. Luo 等 (2006) 研究了电磁弹性动力学非传统 Hamilton 型变分原理. Luo 和 Kuang (1999) 建立了热压电体的 Hamilton 原理. Liu 和 Zhang (2007) 在 Hamilton 体系下, 建立了电磁热弹性壳的齐次状态向量方程和等参元列式. Song 等 (2009) 应用变积方法建立了电磁热弹性体的 Hamilton 原理, 但文献中建立的电磁热弹性体的变分原理不是完全耦合的变分原理, 包含电磁弹性体的泛函和温度场的泛函两部分.

目前还没有关于电磁连续介质力学的 Lagrange 方程的研究. 按照前文所述, 可以通过两种方式: 一是通过正确定义动能和势能, 直接建立电磁连续介质力学的 Lagrange 方程; 二是通过建立完全耦合的电磁连续介质力学的 Hamilton 原理, 应用 Lagrange-Hamilton 体系, 进而建立电磁连续介质力学的 Lagrange 方程.

致 谢 国家自然科学基金项目资助课题 (一般力学的广义变分原理研究 10272034); 黑龙江省自然科学基金项目资助课题 (电磁热弹性体耦合理论模型和计算方法研究 A2015013).

参 考 文 献

爱林根. 朱照宣译. 1985. 连续统物理的基本原理. 南京: 江苏科学技术出版社 (Eringen A C. 1975. Basic Principles of Continuum Physics. Academic Press).

爱林根. 程昌钧, 俞焕然译. 1991. 连续统力学. 北京: 科学出版社 (Eringen A C. 1967. Mechanics of Continua. New York: John Wiley and Sons, Inc).

陈滨. 2010. 分析动力学 (第二版). 北京: 北京大学出版社 (Chen B. 2010. Analytical Dynamics (2nd edn). Beijing: Peking University Press).

陈滨, 梅凤翔. 1994. 中国非完整力学三十年. 开封: 河南大学出版社 (Chen B, Mei F X. 1994. Thirty Years for Nonholonomic Mechanics in China. Kaifeng: Henan University Press).

程昌钧, 朱正佑. 2003. 关于粘弹性力学的一些进展. 自然杂志, **25**: 1-11 (Cheng C J, Zhu Z Y. 2003. Advance on theory of viscoelasticity. *Nature Magazine*, **25** : 1-11).

蔡建乐, 梅凤翔. 2008. Lagrange 系统 lie 点变换下的共形不变性与守恒量. 物理学报, **57**: 5369-5373 (Cai J L, Mei F X. 2008. Conformal invariance and conserved quantity of Lagrange systems under lie point transformation. *Acta Physica Sinica*, **57**: 5369-5373).

董平, J N 罗赛托斯. 1979. 有限单元法 — 基本方法与实践. 北京: 国防工业出版社 (Tong P, Rossettos J N. 1979. Finite Element Method—Basic Technique and Implementation. Boston: MIT Press).

戴世强, 邓学蓥, 段祝平, 黄永念, 黄筑平, 李家春, 连淇祥, 陆启韶, 沈青, 谈庆明, 陶祖莱, 王克仁, 王文标, 王自强, 解伯民, 姚振汉, 殷有泉, 余寿文, 张兆顺, 周显初, 朱如曾, 朱照宣. 2001. 20 世纪理论和应用力学十大进展. 力学进展, **31**: 322-326 (Dai S Q, Deng X Y, Duan Z P, Huang Y N, Huang Z P, Li J C, Lian Q X, Lu Q S, Shen Q, Tan Q M, Tao Z L, Wang K R, Wang W B, Wang Z Q, Xie B M, Yao Z H, Yin Y Q, Yu S W, Zhang Z S, Zhou X C, Zhu R Z, Zhu Z X. 2001. Top ten progresses of theoretical and applied mechanics in twenty century. *Advances in Mechanics*, **31**: 322-326).

范绪箕. 2009. 高速飞行器热结构分析与应用. 北京: 国防工业出版社 (Fan X Q . 2009. Thermal Structures Analysis and Applications of High Speed Vehicles. Beijing: National Defense Industry Press).

冯晓九, 梁立孚. 2016. Lagrange 方程应用于连续介质力学. 北京大学学报, **52**: 597-607 (Feng X J, Liang L F. 2016. Lagrange equation applied to continuum mechanics. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, **52**: 597-607).

冯晓九, 梁立孚, 郭庆勇. 2016. 结构的刚 – 热弹耦合稳定性问题研究. 中国科学: 技术科学, **46**: 1039-1047 (Feng X J, Liang L F, Guo Q Y. 2016. Investigation of structural stability of rigid-thermo-elastic coupling. *Sci Sin Tech*, **46**: 1039-1047).

冯晓九, 梁立孚, 宋海燕. 2016. 刚 – 弹 – 液耦合动力学的功能型拟变分原理. 中国科学: 技术科学, **46**: 195-203 (Feng X J, Liang L F, Song H Y. 2016. Quasi variational principle of the rigid-elastic-liquid coupling dynamics. *Sci Sin Tech*, **46**: 195-203).

郭永新, 罗绍凯, 梅凤翔. 2004. 非完整约束系统几何动力学研究进展: Lagrange 理论及其他. 力学进展, **34**: 477-492 (Guo Y X, Luo S K, Mei F X. 2004. Progress of geometric dynamics of nonholonomic constrained mechanical systems: Lagrange theory and others. *Advances in Mechanics*, **34**: 477-492).

黄彬彬, 石志飞, 章梓茂. 2000. 压电材料变分原理逆问题的研究 —— 动力学中的逆问题. 复合材料学报, **17**: 103-106 (Hang B B, Shi Z F, Zhang Z M. 2000. On the inverse problem in calculus of variations for piezoelectric media—The inverse problem in dynamics. *Acta Metallurgica Sinica* (*English letters*), **17**: 103-106).

罗恩. 1990. 关于线粘弹性动力学中各种变分原理. 力学学报, **22**: 484-489 (Luo E. 1990. On the variational principles for linear theory of dynamic viscoelasticity. *Acta Mechanica Sinica*, **22**: 484-489).

刘高联. 1989. 流体力学变分原理及其有限元法研究的进展. 上海力学, **10**: 73-80 (Liu G L. 1989. Research development of variation principles finite element method in fluid mechanics. *Chinese Quarterly Mechanics*, **10**: 73-80).

刘锦阳, 洪嘉振. 2006. 温度场中的柔性梁系统动力学建模. 振动工程学报, **19**: 469-474 (Liu J Y, Hong J Z. 2006. Geometric nonlinear formulation of flexible beam systems in temperature field. *Journal of Vibration Engineering*, **19**: 469-474).

梁立孚. 2011a. 论航天器动力学中的一个理论问题. 中国科学 G, **41**: 94-101 (Liang L F. 2011a. Investigation of a theoretical problem in spacecraft dynamics. *Science in China* (*G*), **41**: 94-101).

梁立孚. 2011b. 力学和电磁学中的变分原理及其应用. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社 (Liang L F. 2011b. Variational principles in mechanics and electromagnetics and their applications. Harbin: Harbin Engineering University Press).

梁立孚, 刘宗民, 郭庆勇. 2013. 充液系统刚 – 液耦合动力学功能型拟变分原理. 哈尔滨工程大学学报, **34**: 1514-1519 (Liang L F, Liu Z M, Guo Q Y. 2013. Quasi-variational principle of rigid-liquid coupling dynamics in liquid-filled system. *Journal of Harbin Engineering University*, **34**: 1514-1519).

梁立孚, 宋海燕, 樊涛, 刘宗民. 2015. 非保守系统的拟变分原理及其应用. 北京: 科学出版社 (Liang L F, Song H Y, Fan T, Liu Z M. 2015. Quasi-variational Principles of Non-conservative System and Their Applications. Beijing: Science Press).

梁立孚, 宋海燕, 郭庆勇. 2015. 应用 Lagrange 方程研究刚弹耦合动力学. 哈尔滨工程大学学报, **36**: 456-460 (Liang L F, Song H Y, Guo Q Y. 2015. Research on rigid-elastic coupling dynamics using Lagrange equation. *Journal of Harbin Engineering University*, **36**: 456-460).

梁立孚, 宋海燕, 李海波. 2016. 航天分析动力学. 北京: 科学出版社 (Liang L F, Song H Y, Li H B. 2016. Analytical Dynamics of Aerospace Systems. Beijing: Science Press).

梁立孚, 石志飞. 1993. 黏性流体力学的变分原理及其广义变分原理. 应用力学学报, **10**: 119-123 (Liang L F, Shi Z F. 1993. Variational principles and generalized variational principles in hydrodynamics of viscous fluids. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, **10**: 119-123).

梁立孚, 周平. 2018. Lagrange 方程应用于流体动力学. 哈尔滨工程大学学报, **39**: 1-7 (Liang L F, Zhou P. 2018. Application of Lagrange equation in fluid mechanics. *Journal of Harbin Engineering University*, **39**: 1-7).

李青, 王天舒, 马兴瑞. 2012. 充液航天器液体晃动和液固耦合动力学的研究与应用. 力学进展, **42**: 109-118 (Li Q, Wang T S, Ma X R. Reviews on liquid sloshing dynamics and liquid-structure coupling dynamics in liquid-filled spacecrafts. *Advances in Mechanics*, **42**: 109-118).

梅凤翔. 2004. 约束力学系统的对称性与守恒量. 北京: 北京理工大学出版社 (Mei F X. 2004. Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems. Beijing: Beijing Institute of Technology Press).

梅凤翔. 2013a. 分析力学 (上、下卷). 北京: 北京理工大学出版社 (Mei F X. 2013a. Analytical Mechanics (Volume 1, Volume 2). Beijing: Beijing Institute of Technology Press).

梅凤翔. 2013b. 广义 Birkhoff 系统动力学. 北京: 科学出版社 (Mei F X. 2013b. Dynamics of Generalized Birkhoffan System. Beijing: Science Press).

梅凤翔, 罗绍凯, 赵跃宇. 1996. 中国分析力学 40 年. 北京理工大学学报, **16**: 1-7 (Mei F X, Luo S K, Zhao Y Y. 1996. Forty years for analytical mechanics in China. *Journal of Beijing Institute of Technology*, **16**: 1-7).

梅凤翔, 尚玫. 2000. 一阶 lagrange 系统的 lie 对称性与守恒量. 物理学报, **49**: 1901-1903 (Mei, F X, Shang M. 2000. Lie symmetries and conserved quantities of first order lagrange systems. *Acta Phys Sin*, **49**: 1901-1903).

闵桂荣, 郭舜. 1998. 航天器热控制. 北京: 科学出版社 (Min G R, Guo S. 1998. Spacecraft Thermal Control. Beijing: Science Press).

马兴瑞, 王本利, 苟兴宇. 2001. 航天器动力学 —— 若干问题进展及应用. 北京: 科学出版社 (Ma X R, Wang B L, Gou X Y. 2001. Spacecraft Dynamics: The Advances of Several Problems and Its Application. Beijing: Science Press).

沈惠川. 1998. 弹性力学的 Lagrange 形式: 用 Routh 方法建立弹性有限变形问题的基本方程. 数学物理学报, **18**: 78-88 (Shen H C. 1998. Lagrange formalism of elasticity: Building the basic equations on finite-deformation problems by Routh's method. *Acta Mathematieaentia*, **18**: 78-88).

汪家訸. 1958. 分析动力学. 北京: 高等教育出版社 (Wang J H. 1958. Analytical Dynamics. Beijing: Higher Education Press).

王琪, 陆启韶. 2001. 多体系统 Lagrange 方程数值算法的研究进展. 力学进展, **31**: 9-17 (Wang Q, Lu Q S. 2001. Advances in the numerical methods for Lagrange's equations of multibody systems. *Advances in Mechanics*, **31**: 9-17).

王作君, 郑德忠, 郑成博, 郑世科. 2011. 电磁弹性动力学初边值问题 12 类变量广义变分原理. 计算力学学报, **28**: 63-65 (Wang Z J, Zheng D Z, Zheng C B, Zheng S K. 2011. Twelve-field generalized variational principles for initial-boundary-value problem of magneto-electroelasto dynamics. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, **28**: 63-65).

王照林, 刘延柱. 2002. 充液系统动力学. 北京: 科学出版社 (Wang Z L, Liu Y Z. 2002. Dynamics of Liquid-filled System. Beijing: Science Press).

杨炳渊, 史晓鸣, 梁强. 2008. 高超声速有翼导弹多场耦合动力学的研究和进展 (下). 强度与环境, **35**: 55-62 (Yang B Y, Shi X M, Liang Q. 2008. Investigation and development of the multi-physics coupling dynamics on the hypersonic winged missiles. *Structure & Environment Engineering*, **35**: 55-62).

杨挺青. 1990. 粘弹性力学. 武汉: 华中科技大学出版社 (Yang T Q. 1990. Viscoelasticity. Wuhan: Huazhong University of Technology Press).

周平, 梁立孚. 2017. 非保守系统的 Lagrange 方程. 哈尔滨工程大学学报, **38**: 452-459 (Zhou P, Liang L F. 2017. Lagrange equation of non-conservative systems. *Journal of Harbin Engineering University*, **38**: 452-459).

周平, 赵淑红, 梁立孚. 2009. 含阻尼非保守分析力学的拟变分原理. 北京理工大学学报, **29**: 565-569 (Zhou P, Zhao S H, Liang L F. 2009. Quasi-variational principles on non-conservative analytical mechanics with damping. *Journal of Beijing Institute of Technology* (*Natural Science Edition*), **29**: 565-569).

钟万勰. 2002. 应用力学对偶体系. 北京: 科学出版社 (Zhong W X. 2002. Duality Method in Applied Mechanics. Beijing: Science Press).

张毅, 范存新, 梅凤翔. 2006. Lagrange 系统对称性的摄动与 hojman 型绝热不变量. 物理学报, **55**: 3237-3240 (Zhang Y, Fan C X, Feng X M. 2006. Perturbation of symmetries and hojman adiabatic invariants for Lagrangian systems. *Acta Physica Sinica*, **55**: 3237-3240).

张毅, 梅凤翔. 2004. 非保守力与非完整约束对 lagrange 系统 noether 对称性的影响. 物理学报, **53**: 661-665 (Zhang Y, Mei F X. 2004. Effects of non-conservative forces and nonholonomic constraints on noether symmetries of a Lagrange system. *Acta Physica Sinica*, **53**: 661-665).

Altay G, Dokmeci M C. 2005. Variational principles for the equations of porous piezoelectric ceramics. *IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics* & *Frequency Control*, **52**: 2112-2119.

Auffray N, Dell'Isola F, Eremeyev V, Madeo A, Rosi G. 2015. Analytical continuum mechanics la Hamilton-Piola least action principle for second gradient continua and capillary fluids. *Mathematics* & *Mechanics of Solids*, **20**: 375-417.

Chien W Z. 1984. Variational principles and generalized variational principles in hydrodynamics of viscous fluids. *Applied Mathematics and Mechanics* (*English Edition*), **5**: 305-322.

Chen X W, Liu C, Mei F X. 2008. Conformal invariance and Hojman conserved quantities of first order Lagrange systems. *Chinese Physics B*, **17**: 3180-3184.

Eringen A C. 1962. Nonlinear theory of continuous media. *Journal of Applied Mechanics*, **31**: 368-377.

Fahrenthold E P, Koo J C. 1999. Discrete hamilton's equations for viscous compressible fluid dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics* & *Engineering*, **178**: 1-22.

Granados A L M. 1998. Variational principles in continuum mechanics. *Boletin Tecnico/Technical Bulletin*, **36**: 19-42.

Gouin H. 2008. Variational theory of mixtures in continuum mechanics. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, **9**: 469-491.

Hanyga A, Seredyńska M. 2008. Hamiltonian and Lagrangian theory of viscoelasticity. *Continuum Mechanics* & *Thermodynamics*, **19**: 475-492.

Hean C R, Fahrenthold E P. 2017. Discrete Lagrange equations for reacting thermofluid dynamics in arbitrary Lagrangian-Eulerian frames. *Computer Methods in Applied Mechanics* & *Engineering*, **313**: 303-320.

Goldstein H, Poole C P, Safko J L. 2001. Classical Mechanics (3rd Edition). Addison-Wesley.

Hamilton WR. Part I 1834, Part II 1835. On a general method in dynamics. *Philosophical Transaction of the Royal Society*, **Part I 1834**: 247-308, **Part II 1835**: 95-144.

Irschik H, Holl H J. 2002. The equations of Lagrange written for a non-material volume. *Acta Mechanica*, **153**: 231-248.

Irschik H, Holl H J. 2015. Lagrange's equations for open systems, derived via the method of fictitious particles, and written in the Lagrange description of continuum mechanics. *Acta Mechanica*, **226**: 63-79.

Kim G, Senda Y. 2007. A methodology for coupling an atomic model with a continuum model using an extended Lagrange function. *Journal of Physics Condensed Matter An Institute of Physics Journal*, **19**: 246203.

Kim Jinkyu, Dargush G F, Ju Y K. 2013. Extended framework of Hamilton's principle for continuum dynamics. *International Journal of Solids and Structures*, **50**: 3418-3429.

Kuang Z B. 2014. Theory of Electroelasticity. Springer.

Lyakhov A. F. 1992. Variational formulation of the problem of mooring (anchor) line dynamics. *International Journal of Fluid Mechanics Research*, **21**: 116-120.

Longatte E, Bendjeddou Z, Souli M. 2003. Application of arbitrary Lagrange Euler formulations to flow-induced vibration problems. *Journal of Pressure Vessel Technology*, **125**: 225-233.

Luo E, Kuang J S. 1999. Some basic principles for linear coupled dynamic thermopiezoelectricity. *Sci. China Ser. A-Math*, **42**: 1292-1300.

Luo E, Zhu H J, Yuan L. 2006. Unconventional Hamilton-type variational principles for electromagnetic elastodynamics. *Sci. China Ser. G-Phys. Mech. Astron*, **49**: 119-128.

Lagrange J L. (Joseph Louis). 1811 (Originally published in l788). Méanique analytique, Paris: Ve Courcier.

Liang L F, Liu D K, Song H Y. 2005. The generalized quasi-variational principles of non-conservative systems with two kinds of variables. *Science in China* (*Series G*), **48**: 600-613.

Liang L F, Liu S Q, Zhou J S. 2009. Quasi-variational principles of single flexible body dynamics and their applications. *Science in China* (*G*), **52**: 775-78.

Liang L F, Song H Y. 2013. Non-linear and non-conservative quasi-variational principle of flexible body dynamics and application in spacecraft dynamics. *Science China Physics, Mechanics* & *Astronomy*, **56**: 2192-2199.

Liu Y H, Zhang H M. 2007. Variation principle of piezothermoelastic bodies, canonical equation and homogeneous equation. *Appl Math Mech* (*English Edition*), **28**: 193-200.

Mei F X. 2000. Form invariance of Lagrange system. *Journal of Beijing Institute of Technology* (*English Edition*), **87**:175-182.

Mei F X, Xu X J. 2005. Form invariances and lutzky conserved quantities for Lagrange systems. *Chinese Physics B*, **14**: 449-451.

Maximov G A. 2010. A generalized variational principle for dissipative hydrodynamics and its application to Biot's theory for the description of a fluid shear relaxation. *Acta Acustica United with Acustica*, **96**: 199-207.

Mahmoudkhani S. 2017. Dynamics of a mass-spring-beam with 0: 1: 1 internal resonance using the analytical and continuation method. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **97**: 48-67.

Orlov D, Apker T, He C, Othman H, Corke T. 2006. Modeling and experiment of leading edge separation control using SDBD plasma actuators. *Wildlife Research*, **37**: 447-455.

Pian H H, Tong P. 1972. Finite Element Method in Contimuum Mechanics. New York: Academic Press.

Patel M P, Ng T T, Vasudevan S, Corke T C, He C. 2007. Plasma actuators for hingeless aerodynamic control of an unmanned air vehicle. *Journal of Aircraft*, **44**: 1264-1274.

Seiranyan A P. 1984. On a problem of Lagrange. *Mechanics of Solids*, **19**: 100-111.

Song H Y, Hou G L, Sun H, Liang L F. 2015. Rigid–elastic-thermal coupling dynamics and its application. *Advances in Mechanical Engineering*, **7**: 1-8.

Song H Y, Liu Z M, Huang Y H. 2013. Dual form of generalized variational principles for piezoelectricity. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **14**: 205-209.

Song H Y, Zhou Z G, Liang L F, Liu Z M. 2009. Generalized variational principles of electro-magneto-thermo-elasto-dynamics. *Proceedings of ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, **11**: 243-248.

Souchet R. 2014. Continuum mechanics and Lagrange equations with generalised coordinates. *International Journal of Engineering Science*, **76**: 27-33.

Tran-Cong T. 1996. A variational principle for fluid mechanics. *Archive of Applied Mechanics*, **67**: 96-104.

Yang Q, Lv Q C, Liu Y R. 2017. Hamilton's principle as inequality for inelastic bodies. *Continuum Mechanics & Thermodynamics*, **29**: 747-756.

Zenkour A. 1989. Hamilton's mixed variational formula for dynamical problems of anisotropic elastic bodies. *Sm Archives*, **14**: 103-114.

Zheng C B, Liu B, Wang Z J, Zheng S K. 2010. Generalized variational principles for boundary value problem of electromagnetic field in electrodynamics. *Appl. Math. Mech*, **31**: 471-480.

Zhavoronok S I. 2015. On the variational formulation of the extended thick anisotropic shells theory of I. N. vekua type. *Procedia Engineering*, **111**: 888-895.

(责任编委: 戴兰宏)

Analytical dynamics of continuous medium and its application

LIANG Lifu† GUO Qingyong SONG Haiyan

College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China

Abstract First, the studying progress of domestic and foreign scholars on analytical dynamics of continuum is reviewed. This paper mainly studies the problem of applying the Lagrange equation to the continuum dynamics. By using Lagrange-Hamilton system, Lagrange equations and their applications are investigated for non-conservative nonlinear elastic dynamics, incompressible viscous fluid dynamics, viscoelastic dynamics, thermal elastic dynamics, rigid-elastic coupling dynamics and rigid-liquid coupling dynamics. The establishment of finite element calculation model by using Lagrange equation was analyzed. Finally, the prospects of applying the Lagrange equation to problems of the continuum dynamics are discussed.

Keywords continuum analytical dynamics, Lagrange equation, Hamilton principle, Lagrange-Hamilton system

梁立孚, 1939 年生, 哈尔滨工程大学教授, 博士生导师. 主要研究方向: 变分原理及其应用、连续介质分析动力学和耦合分析动力学. 通过长期的研究, 提出变分的逆运算 —— 变积的概念, 建立了变积方法, 使得微积分学中的积分、微分和导数在变分学中都有了对应的概念 —— 变积、变分和变导, 从而初步地将变分学扩充为变积分学. 变积的建立解决了建立变分原理 (含广义变分原理) 难的问题; 变导的应用, 结合 Lagrange-Hamilton 体系, 解决了将 Lagrange 方程应用于连续介质力学和其他学科的问题. 研究耦合分析动力学 (或者称为分析耦合动力学); 解决了将 Hamilton 型变分原理和 Lagrange 方程应用于刚 – 弹、刚 – 液、刚 – 弹 – 液等耦合系统的问题; 在航空、航天、航海等领域获得重要应用. 应用可变函数选值域的理论和可变函数曲线接近度的理论研究非完整系统分析动力学, 较好地解释了非完整力学中的一些长期存在的但难以说明的问题, 进而研究了非完整系统分析动力学的理论框架.

Received: 27 September 2017; accepted: 19 March 2018; online: 25 April 2018

† E-mail: lianglifu@hrbeu.edu.cn

Cite as: Liang L F, Guo Q Y, Song H Y. Analytical dynamics of continuous medium and its application. *Advances in Mechanics*, 2019, 49: 201908