第 43 卷 第 1 期 力 学 进 展 Vol. 43 No. 1
2013 年 1 月 25 日 ADVANCES IN MECHANICS Jan. 25, 2013

多自由度非线性随机系统的响应与稳定性 *

金肖玲 王 永 黄志龙 †

浙江大学航空航天学院工程力学系, 杭州 310027

摘 要 响应与稳定性分析一直是随机动力学研究的热点, 发展预测随机响应及判定系统响应性态的方法具有重要的科学意义与广阔的应用前景. 本文综述了有关多自由度非线性随机系统的响应与稳定性的研究. 首先简介用于随机系统响应预测的 Fokker – Planck – Kolmogorov 方程法、随机平均法、等效线性化法、等效非线性系统法和 Monte Carlo 模拟法, 评述其优缺点, 进而讨论了多自由度非线性随机系统响应的精确平稳解、近似瞬态解的研究现状. 然后介绍了随机系统稳定性分析的两类方法, 即 Lyapunov 函数法及 Lyapunov 指数法, 并综述了多自由度非线性随机系统稳定性分析的研究现状. 最后给出几点发展建议.

关键词 多自由度非线性系统, 随机响应, 随机稳定性, 随机平均法, Fokker-Planck-Kolmogorov 方程

中图分类号: O322, O324 **文献标识码**: A **文章编号**: DOI: 10.6052/1000-0992-12-026

1 引 言

在自然、工程及社会领域中不可避免地存在随机激励, 诸如大气湍流、海浪、路面或轨道不平度、强地震引起的地面运动、电压波动、股市波动和生物群体波动等. 随机激励作用下系统的动态响应与确定性激励作用下的响应有天壤之别. 因此, 平行于确定性激励作用下的动力系统的特性问题, 必须研究随机激励作用下的动力系统的特性问题, 即研究所谓的随机动力系统. 例如, 研究不平路面上车辆的振动, 道路表面的不平度施加在车轮上的位移扰动为随机激励; 研究风载作用下悬索结构 (悬索桥的缆索、电杆上的电线等) 的振动, 脉动风为随机激励; 研究大气湍流对飞机的作用, 大气湍流为随机激励; 研究海浪对轮船和舰艇的作用, 波浪为随机激励; 等等. 随机激励与确定性激励的本质区别在于: 后者可用时间与 (或) 空间坐标的确定性函数来描述, 而前者只能用概率或统计的方法描述. 随机激励可以是外加的, 也可以通过使系统参数发生随机变化而起作用, 后者称为随机参变激励. 另一方面, 动力系统总是含有各种非线性因素并体现出或强或弱的非线性行为. 例如, 材料黏弹性和弹塑性行为、构件大变形、机械部件的间隙和干摩擦、控制系统的元件饱和、控制策略非线性等. 非线性系统的行为偏离采用线性模型的预测结果, 并在许多情况下和线性模型的预测结果有本质不同. 系统的非线性可以表现为非线性恢复力, 非线性阻尼及非线性惯性. 为了能够反映问题的本质, 相当部分问题必须多自由度非线性系统描述, 如大型旋转机械系统、电力系统、复杂生物网络系统等. 因此, 研究从自然科学、工程科学及社会科学中抽象得到的多自由度非线性随机动力学系统, 发展预测其随机响应的方法及判定系统响应的定性性态等具有重要的科学意义与广阔的应用前景.

本文主要论述近年来多自由度非线性随机系统的响应和稳定性的研究进展. 第 2 节阐述多自由度非线性随机系统的响应, 介绍了四种分析方法, 重点讨论了基于 FPK (Fokker – Planck – Kolmogorov) 方程法和随机平均法的系统响应的精确平稳解及近似瞬态解. 第 3 节阐述多自由度非线

收稿日期 : 2012-03-01, 修回日期 : 2012-07-16

* 国家自然科学基金 (11025211, 11002077, 11202181), 浙江省自然科学基金 (Z6090125, LQ12A02001) 和高校博士点基金 (20110101110050)资助项目

† E-mail: zlhuang@zju.edu.cn

性系统的随机稳定性, 侧重概率为1稳定性. 介绍两种分析方法: Lyapunov指数法和Lyapunov函数法, 并讨论了两种方法与随机平均法相结合的随机稳定性分析方法. 由于笔者水平及阅读范围所限, 本文只提及极其有限的一部分结果和文献.

2 多自由度非线性随机系统的响应

五十余年来, 已发展了许多预测非线性随机响应的方法, 诸如FPK方程法、随机平均法、统计线性化法、摄动法、等效非线性系统法、矩函数微分方程法及各种截断方案、拟静态法、级数解法、虚拟激励法、Monte Carlo模拟法等, 大部分方法在系列专著[1-9] 中已作了详细论述. 这里简述多自由度随机系统分析常采用的 4 种预测方法.

FPK方程法是分析非线性系统随机振动问题的有效工具. 其基本思路是: 由系统随机微分方程导出FPK方程, 并在适当的边界条件和初始条件下求解该方程, 得到系统响应的转移概率密度(或无条件概率密度), 该方法是非线性随机动力学分析中理论最严密的一种解法. 然而, FPK方程法要求激励必须是白噪声(对某些特殊随机激励情形, 如有理谱密度情形, 也可以通过增加Markov过程维数的方法直接导出相应的FPK方程), 响应必须是Markov过程. FPK方程法对系统非线性强弱没有限制, 只是对非线性强的系统FPK方程可能更难求解. 由于该方法理论严密, 其精确解常常作为判断其他各种近似方法精度的基准. FPK方程的解析解难以得到, 已提出一些研究以FPK方程为基础的近似解法. 然而, 对于高维FPK方程, 这是一个很大的挑战.

随机平均法是处理随机动力系统问题的一种有效近似方法. 应用随机平均原理可以证明, 在一定条件下线性或非线性动力系统对非白噪声激励的响应可用扩散过程近似. 该近似扩散过程的FPK方程的漂移与扩散系数可由原系统的运动方程经适当的随机平均(或随机平均连同对时间的确定性平均)得到, 求解这个平均FPK方程可得原系统响应的近似概率密度, 进而得到各阶统计矩. 随机平均法的优点在于: 经过随机平均和确定性平均, 使原来不是扩散过程的系统转化为扩散过程, 平均系统的维数大大降低, 且保留原系统的主要特征, 这样就可以采用较低维的FPK方程分析系统特性. 正因如此, 随机平均法在非线性随机动力学研究中有着广泛的应用. 其中主要的有标准随机平均法、能量包线随机平均法、拟Hamilton系统随机平均法和基于广义谐和函数的随机平均法[9]. 标准随机平均法的一个缺陷是不能计及非线性恢复力对响应统计量的影响, 另外3种平均法则没有这个限制.

等效线性化方法又称统计线性化法, 是确定性非线性系统的等效线性化法在随机动力学领域的直接推广. 该方法分别由Kazakov, Booton和Caughey独立提出, 通常用来求解弱非线性系统的响应统计量. 其基本思想是: 以线性系统等效替代原非线性系统, 使得原系统按照统计意义上误差最小的原则化为形式上的线性随机系统. 等效线性化法由于其灵活性在多自由度系统近似分析中获得了广泛应用. 该方法的局限性在于: 激励必须是平稳正态随机过程, 响应的分布是接近于正态分布的平稳随机过程; 虽可得到可靠的响应均值和均方值, 但是相应响应概率密度估计可能很不精确, 特别是在尾部区域. 因此, 学者们提出了各种改进方法[10-13], 例如Tail等效线性化法等. 由于该方法用线性随机系统近似替代原非线性随机系统, 因此其致命缺陷在于不能适用于强非线性随机系统. 由此, 人们进一步发展了等效非线性系统法[9]. 与等效线性化方法不同, 该方法以某个具有精确平稳解的非线性系统替代给定的非线性系统, 从而保证了原始系统的非线性特性. 该方法特别适用于预测具有本质非线性特征的强非线性刚度、非线性阻尼的随机系统响应. 目前, 等效非线性系统法在多自由度系统中的成果十分有限.

Monte Carlo模拟法是非线性随机动力学中最通用的数值分析方法. 其基本思路是: 首先产生大量的激励样本, 对每一条激励样本计算系统的响应样本, 然后对响应样本进行统计分析, 得到系统响应的各阶统计量. Monte Carlo模拟法原则上适用于任意线性、非线性系统, 且能获得随机响应的完整信息. 其主要缺点是计算成本高, 计算精度取决于样本个数. 在实际应用中, 当不存在精确解时, 该法通常用作确定其他近似方法精度的基准. 其发展状况详见综述文献[3, 11]. 该法用于分析多自由度非线性系统时, 计算效率有待进一步提高.

限于篇幅, 不再赘述其他方法. 下文重点介绍多自由度非线性随机系统基于FPK方程法和随机平均法的精确平稳解和近似瞬态解的研究进展.

2.1 精确平稳解

由随机系统导出其相应的FPK方程, 在适当

的边界条件及初始条件下得到的解为精确瞬态解, 精确瞬态解只有对非常少的情形才能得到, 因而人们首先讨论精确平稳解, 即所谓的简化FPK方程的解. 简化FPK方程是漂移与扩散系数不显含时间且方程不含时间导数项的FPK方程, 精确平稳解还需满足非负性与归一化条件.

求解精确平稳解的方法主要有平稳势法、局部平衡法、广义平稳势法等, 并且已经得到了多类单自由度强非线性随机系统的精确平稳解, 这些方法及结果已在专著[3,6,9] 中详细介绍. 这里简要回顾多自由度非线性随机系统的精确平稳解方面的发展. 20世纪60年代起, Caughey等[14-16] 学者得到了几类特殊类型的多自由度非线性系统的FPK方程的精确平稳解, Fuller[17] 将Gauss白噪声外激下的非线性系统表示成随机激励的耗散的Hamilton系统的形式(虽然当时他并未使用这一名词), 并将相应FPK方程的平稳解表示成Hamilton函数的泛函. 20世纪80年代末与90年代初, Soize[18-19] 与Zhu等[20-21] 独立地得到了Gauss白噪声外激与参激下非线性耗散Hamilton系统的能量等分的精确平稳解, 这些解都是能量的泛函. 能量等分的精确解意味着多自由度非线性随机系统的各个自由度之间的能量比值是一定的; 如果改变随机激励和阻尼的大小, 只能改变系统总能量的分布, 而各个自由度间的能量分配不改变. 然而Gauss白噪声外激下的时不变多自由度线性系统的平稳概率密度是Gauss的, 改变随机激励与阻尼的大小, 可同时改变系统总能量的分布与各个自由度间能量的分配, 即它是能量非等分的, 因此在线性与非线性多自由度随机动力学系统的精确平稳解之间存在不一致. 为消除这种不一致, 20世纪90年代以来, Zhu等[22-24] 发现原来的解只考虑到解的系统Hamilton函数(总能量)的泛函形式, 通过将多自由度非线性随机系统由Lagrange体系转化为Hamilton体系, 他们应用Hamilton系统的可积性与共振性将原系统分为完全不可积、完全可积非共振/共振、部分可积非共振/共振等5类, 对每一类分别得到相应的Gauss白噪声激励的耗散的Hamilton系统的精确平稳解. 其中第一类系统的平稳解是能量等分的, 其他4类系统的平稳解是能量非等分的, 从而打破了多自由度非线性随机系统的精确平稳解局限于能量等分解的局面. Huang等[25] 利用广义Hamilton系统的可积性与共振性进一步得到了拟广义Hamilton系统的精确平稳解. 以上这些精确平稳解的泛函都是与系统总能量或子系统能量有关. 关于非能量依赖的精确平稳解, Wang[26] 和To等[27] 得到几类非常特殊的单自由度强非线性随机系统的解. 本文作者利用构造等价随机系统的方法, 导出了几类Gauss白噪声激励的多自由度非线性随机系统的非能量依赖精确平稳解[28-29].

总体看来多自由度非线性随机系统的精确平稳解还是局限在很少的几类, 特别是非能量依赖的解更少, 还需寻找更多的多自由度非线性随机系统的能量依赖及非能量依赖的精确平稳解. 这些结果不但可以加深人们对多自由非线性随机系统的理解, 同时又可以为发展等效非线性系统法奠定基础.

2.2 近似瞬态解

非线性随机系统的精确瞬态解一般很难得到, 迄今已得到的精确瞬态解只是针对极少数一阶非线性系统[30] 及多自由度常系数线性系统[31-33], 因此人们转而寻求其近似解. 寻求近似解可从两方面着手: 一是FPK方程的近似求解方法; 另一个是应用随机平均法等扩大FPK方程法的使用范围, 再求解相应的FPK方程. FPK方程瞬态解的近似数值求解, 已发展的方法有特征函数展开法、迭代法、Galerkin法、有限差分法、随机步行法、路径积分法等[3]. Atkinson[34] 用变分法求非线性随机系统的FPK方程的近似特征值与特征函数, 从而得到系统响应的近似瞬态转移概率密度. Johnson和Scott[35] 用摄动法求特征值问题, 得到了Gauss白噪声激励下的Duffing振子的近似瞬态转移概率密度. Liu和Davies[36] 用非Gauss闭合法得到了受Gauss白噪声激励的非线性阻尼振子的非平稳响应的概率密度. Bonzani等[37] 用半解析法得到了非线性随机系统响应的近似瞬态概率密度. Zhang等[38] 假设概率密度具有指数形式, 用Galerkin方法得到了随机激励的非线性振子响应的近似瞬态概率密度. Yu等[39] 和Mamontov等[40] 用路径积分法求得系统响应的近似瞬态概率密度. 其他近似瞬态解的求解方法可参看文献[3, 41-42].

随机平均法可实现系统降维, 从而可以降低FPK方程的维数. 随机平均法和FPK方程法相结合的方法在多自由度非线性随机系统响应预测中有广泛应用. 近十年来, 随机平均法在求解系统近似平稳解方面有很大的进展. 朱位

秋等发展起来的拟Hamilton系统的随机平均法业已应用于Gauss白噪声激励以及其他激励形式(如宽带、窄带)作用下的多自由度非线性随机系统的近似平稳解[9]，并且进一步应用于预测时滞、滞迟、黏弹性、振动碰撞系统的近似平稳解[43-46]．基于随机平均法求解多自由度非线性随机系统响应的近似瞬态概率密度也有一些进展. 受到Spanos等[47]的启发(他们通过将单自由度非线性随机系统瞬态响应表示为随时间变化的Rayleigh分布与一组适当的正交基函数线性组合的和)，Jin等[48]用基于广义谐和函数的随机平均法和Galerkin法研究了Gauss白噪声激励下的多自由度非线性随机系统的瞬态响应. 应用随机平均法可以得到维数较低的关于响应瞬态概率密度的FPK方程, 将该方程的解近似表示为多重Laguerre型正交基函数的级数和(其中组合系数为时间的函数), 用Galerkin法得到关于这些系数的一阶线性微分方程组, 从而通过求解这一线性微分方程组得到系统响应的近似瞬态概率密度及各阶统计矩.

由于理论方法的缺乏及计算的复杂性, 对多自由度非线性随机动力系统响应的瞬态概率密度的研究还很少, 这是一个亟待深入研究的课题.

3　多自由度非线性随机系统的稳定性

稳定性问题的重要性是不言而喻的. 任何一个实际系统在运行时总会受到各种各样的干扰, 受到这些干扰之后, 系统能否保持预定的运动或工作状况是必须考虑的问题, 也是系统设计的首要目标. 随机稳定性是非线性随机动力学研究的最基本、最重要的分支之一. 其数学描述是研究当初值偏离平衡状态或平稳状态时, 随机动力学系统之解与该平衡状态或平稳状态间的距离在半无限时间区间上是否有界以及在时间趋于无穷时解是否收敛于该平衡状态或平稳状态. 考虑到随机动力系统的平衡位置或平稳解的稳定性问题总可以通过变换转化为随机动力系统平凡解的稳定性问题, 因此只需研究随机动力学系统平凡解的稳定性. 随机过程的有界性与收敛性可有多种定义方式, 因此随机稳定性也有多种定义. 最常用的有概率为1稳定性、概率稳定性及p阶平均稳定性等, 关于它们的定义可参考文献[3,49-51]. 本文侧重概率为1稳定性的综述, 它是Lyapunov稳定性理论在随机系统中的推广, 在文献中研究最多. Lyapunov随机稳定性有两种研究方法: 一种是Lyapunov第一方法(即Lyapunov指数法), 其理论基础是1968年Oseledec提出的乘性遍历定理[52]及Khasminskii方法[53], 其关键是如何计算系统的最大Lyapunov指数; 另一种是Lyapunov第二方法(即Lyapunov函数法), 其关键是寻求合适的Lyapunov函数.

3.1　基于Lyapunov指数法的随机稳定性

用Lyapunov指数研究概率为1渐近稳定性, 可通过最大Lyapunov指数的符号来判定系统的概率为1稳定性. 由此得到系统的概率为1渐近稳定的充要条件, 这是最大Lyapunov指数法的优点. 对一维随机系统而言, Lyapunov指数法有很大的优势; 但是对多维随机系统, 由于确定单位球面上相应多维过程的平稳概率密度很困难, 使该方法应用受限. Khasminskii[53]给出了扩散矩阵为非负定且非退化的线性Itô随机微分方程的最大Lyapunov指数的表达式, 得到了系统概率为1渐近稳定的充要条件. 对于线性系统或漂移和扩散系统具有齐次性质的非线性随机系统, 应用Oseledec乘性遍历定理, 可以得到该系统的Lyapunov指数谱. 当然, 还可根据响应的随机过程及Lyapunov指数的定义数值计算Lyapunov指数, 从而判断系统的随机Lyapunov稳定性[54]. 应用随机平均法将系统降维简化, 然后再用随机稳定性的相关理论判定系统的稳定性是一个相对有效的方法. Ariaratnam和Xie[55]基于随机平均法和Khasminskii方法得到了一类耦合的多自由度随机系统的最大Lyapunov指数的显式渐近表达式, 判断了系统的随机稳定性. 近几年来, Zhu等[56-60]将其发展的各类随机平均法应用于系统稳定性的研究中, 提出新的范数定义, 基于这些随机平均法得到了最大Lyapunov指数的表达式, 并判定了非线性随机系统的稳定性. 上述文献虽然得到了最大Lyapunov指数的计算表达式, 但是对高维系统求解最大Lyapunov指数的值仍然是非常困难的. 文献[61]提出了一种求系统概率为1渐近稳定域的新方法, 利用Lyapunov指数对不同范数定义的不变性, 不必求解平稳FPK方程就能直接确定概率为1渐近稳定与不稳定域边界.

3.2　基于Lyapunov函数法的随机稳定性

随机Lyapunov函数法是确定性理论中Lyapunov直接法在随机情形的推广. 该法的特点是

判别系统稳定性时不必求解原系统方程, 而是构造一个Lyapunov函数, 通过该函数及导数的符号在平衡位置附近的变化来判别该平衡位置的稳定性, 得到其充分条件. 此方法最大的困难在于如何构造Lyapunov函数, 关于Lyapunov函数法构造可参考文献[62], 其构造很大程度上依赖经验与技巧. 如果成功构造了合适的Lyapunov函数, 则系统的稳定性就可以很容易确定. 利用矩阵的特征问题的计算方法及矩阵不等式理论等, 可以方便的应用于一些多自由度系统(如生物神经网络系统[63])的稳定性分析, 它比Lyapunov指数法有优势. 最近, Huang等[64] 应用拟Hamilton系统随机平均法和Lyapunov函数法研究了拟不可积及拟可积非共振Hamilton系统的稳定性. 对拟不可积系统, Lyapunov函数取为Hamilton函数; 对拟完全可积非共振系统, 则取为系统的独立对含首次积分的最优线性组合; 最后稳定性问题归结为矩阵的特征值和特征向量问题. 另外, 还将该方法推广应用于时滞随机系统的稳定性分析[65]. 相比于确定系统的稳定性理论和方法, 随机稳定性的研究还远远不够. 对拟线性随机系统的Lyapunov指数法理论虽较完善, 但无法应用于高维随机系统; Lyapunov函数法也仅能应用于一些特殊系统情形, 离实际工程应用尚有很长一段距离.

4 总结与展望

非线性随机动力学理论经过几十年的发展已取得了许多进展, 但总体来说研究成果主要集中于低维随机动力学系统, 除了一些特殊系统情形[66], 大部分是关于个位数的多自由度系统. 对于高维随机动力学系统, 由于受到计算效率及精度的影响, 其响应及稳定性研究还很不成熟, 离实际应用尚有很大距离, 因此, 急需发展一整套完整的理论和一系列高效的数值方法以适应工程需要.

在响应研究方面, 发展新的能量依赖与非能量依赖精确平稳解还需要有新的思路, 要发展适应工程需要的超高维随机动力系统响应预测的数值求解方法及近似解析方法. 在随机稳定性研究方面, 现有的结果基本上是在随机平均法的基础上得到的, 但随机平均法已有一定的近似, 需要发展新的基于原系统的随机稳定性分析方法, 特别是适用于实际工程的高维随机系统, 有必要借鉴更多的确定性系统的已有成果. 另一方面, 随机动力系统往往具有强非线性、有各种约束条件、非光滑、时滞、黏弹性等非常复杂的动力学特性, 发展具有这些复杂非线性特性的高维随机动力学系统的响应与稳定性分析方法是具有挑战性的任务.

参 考 文 献

1 Dimentberg M F. Statistical Dynamics of Nonlinear and Time-Varying Systems. England: Reserch Sdudies Press LtD, 1988
2 Roberts J B, Spanos P D. Random Vibration and Statistical Linearization. New York: Wiley, 1990
3 朱位秋. 随机振动. 北京: 科学出版社, 1992
4 林家浩, 张亚辉. 随机振动的虚拟激励法. 北京: 科学出版社, 2004
5 Soize C. The Fokker-Planck Equation for Stochastic Dynamical Systems and Its Explicit Steady State Solution. Singapore: World Scientific, 1994
6 Lin Y K, Cai G Q. Probabilistic Structural Dynamics: Advanced Theory and Applications. New York: McGraw-Hill, 1995
7 方同. 工程随机振动. 北京: 国防工业出版社, 1995
8 Arnold L. Random Dynamical Systems. Berlin: Springer, 1998
9 朱位秋. 非线性随机动力学控制 ——Hamilton理论体系框架. 北京: 科学出版社, 2003
10 Fujimura K, Kiureghian A D. Tail-equivalent linearization method for nonlinear random vibration. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2007, 22: 63-76
11 Proppe C, Pradlwarter H J, Schuëller G I. Equivalent linearization and Monte Carlo simulation in stochastic dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2003, 18: 1-15
12 Socha L. Linearization in analysis of nonlinear stochastic systems: recent results-Part I: Theory. *Applied Mechanics Reviews*, 2005, 58: 178-205
13 Saha N, Roy D. The Girsanov linearization method for stochastically driven nonlinear oscillators. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2007, 74: 885-897
14 Caughey T K, Payne H J. On the response of a class of self excited oscillators to stochastic excitation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1967, 2: 125-151
15 Caughey T K, Ma F. The exact steady-state solution of a class of nonlinear stochastic systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1982, 17: 137-142
16 Caughey T K, Ma F. The steady-state response of a class of dynamical-systems to stochastic excitation. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1982, 49: 629-632
17 Fuller A T. Analysis of nonlinear stochastic systems by means of the Fokker-Planck equations. *International Journal of Control*, 1969, 9: 603-655
18 Soize C. Steady state solution of Fokker-Planck equation in higher dimension. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1988, 3:196-206
19 Soize C. Exact stationary response of multidimensional nonlinear Hamiltonian dynamic-systems under parametric and external stochastic excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 149: 1-24
20 Zhu W Q, Cai G Q, Lin Y K. On exact stationary solutions of stochastically perturbed Hamiltonian systems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1990, 5: 84-87
21 Zhu W Q, Cai G Q, Lin Y K. Stochastically excited Hamiltonian systems. In: Bellomo N, Casciati F, eds. Proceeding of IUTAM Symposium in Nonlinear Stochastic Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 543-552
22 Zhu W Q, Yang Y Q. Exact stationary solutions of stochastically excited and dissipated integrable Hamiltonian systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1996, 63: 493-500

23 Huang Z L, Zhu W Q. Exact stationary solutions of stochastically and harmonically excited and dissipated integrable Hamiltonian systems. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 230: 709-720
24 Zhu W Q, Huang Z L. Exact stationary solutions of stochastically excited and dissipated partially integrable Hamiltonian systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2001, 36: 39-48
25 黄志龙. 几类非线性随机系统动力学与控制研究. [博士论文]. 杭州: 浙江大学, 2005
26 Wang R, Yasuda K, Zhang Z. A generalized analysis technique of the stationary FPK equation in nonlinear systems under Gaussian white noise excitations. *International Journal of Engineering Science*, 2000, 38: 1315-1330
27 To C W S. Nonlinear Random Vibration: Analytical Techniques and Applications. Netherlands: Swets & Zeitlinger, 2000
28 Huang Z L, Jin X L, Li J Y. Construction of the stationary probability density for a family of SDOF strongly nonlinear stochastic second-order dynamical systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, 43(7): 563-568
29 Huang Z L, Jin X L. Exact stationary solutions independent of energy for strongly nonlinear stochastic systems of multiple degrees of freedom. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2009, 52(8): 2424-2431
30 Caughey T K. Nonlinear theory of random vibration. *Advances in Applied Mechanics*, 1971, 11: 209-253
31 Ibrahim R A. Parametric Random Vibration. New York: Research studies Press Ltd, 1985
32 Garrido L, Masoliver J. On a Class of Exact Solutions to the Fokker-Plank Equations. *Journal of Mathematical Physics*, 1982, 23: 1155-1158
33 Sanmiguel M. Class of exactly solvable Fokker Planck equations. *Zeitschrift Fur Physik B-Condensed Matter*, 1979, 33: 307-312
34 Atkinson J D. Eigenfunction expansions for randomly excited nonlinear-systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1973, 30: 153-172
35 Johnson J P, Scott R A. Extension of eigenfunction-expansion solutions of a Fokker-Planck equation-II Second Order System. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1980, 15: 41-56
36 Liu Q, Davies H G. The Nonstationary response probability density-functions of nonlinearly damped oscillators subjected to white-noise excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 139: 425-435
37 Bonzani I, Riganti R, Zavattaro M G. Transient solution to the diffusion equation for nonlinear stochastically perturbed systems. *Mathematical and Computer Modelling*, 1990, 13: 59-66
38 Zhang X F, Zhang Y M, Pandey M D, et al. Probability density function for stochastic response of non-linear oscillation system under random excitation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2010, 45: 800-808
39 Yu J S, Cai G Q, Lin Y K. A new path integration procedure based on Gauss-Legendre scheme. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1997, 32: 759-768
40 Mamontov E, Naess A. An analytical-numerical method for fast evaluation of probability densities for transient solutions of nonlinear Ito's stochastic differential equations. *International Journal of Engineering Science*, 2009, 47: 116-130
41 Mignolet M P, Fan G W W. Nonstationary response of some 1st-order nonlinear-systems associated with the seismic sliding of rigid structures. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1993, 28: 393-408
42 Wojtkiewicz S F, Bergman L A, Spencer B F, et al. Numerical solution of the four-dimensional nonstationary Fokker-Planck equation. In: IUTAM Symposium on Nonlinearity and Stochastic Structural Dynamics. Madras, India, 1999
43 Liu Z H, Zhu W Q. Stochastic averaging of quasi-integrable Hamiltonian systems with delayed feedback control. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 299: 178-195
44 Wang Y, Ying Z G, Zhu W Q. Nonlinear stochastic optimal control of Preisach hysteretic systems, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2009, 24(3): 255-264
45 Huang Z L, Jin X L. Response and stability of a SDOF strongly nonlinear stochastic system with light damping modeled by a fractional derivative. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 319(3-5): 1121-1135
46 Huang Z L, Liu Z H, Zhu W Q. Stationary response of multi-degree-of-freedom vibro-impact systems under white noise excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 275: 223-240
47 Spanos P D, Sofi A, Di Paola M. Nonstationary response envelope probability densities of nonlinear oscillators. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2007, 74: 315-324
48 Jin X L, Huang Z L. Nonstationary probability densities of nonlinear multi-degree-of-freedom systems under Gaussian white noise excitations. In: Zhu W Q, Lin Y K, Cai G Q, eds. Proceedings of the IUTAM Symposium on Nonlinear Stochastic Dynamics and Control. New York: Springer, 2010. 35-44
49 Kushner H J. Stochastic Stability and Control. New York: Academic Press, 1967
50 Kozin F. A survey of stability of stochastic systems. *Automatica*, 1969, 5: 95-112
51 Khasminskii R Z. Stochastic Stability of Differential Equations. Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff, 1980
52 Oseledec V I. A multiplicative ergodic theorem, Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Transactions of Moscow Mathematical Society*, 1968, 19: 197-231
53 Khasminskii R Z. Necessary and sufficent conditions for asymptotic stability of linear stochastic systems. *Theory of Probability and Its Applications, Ussr*, 1967, 12: 144-147
54 Potapov V D. Stability of elastic systems under a stochastic parametric excitation. *Archive of Applied Mechanics*, 2008, 78: 883-894
55 Ariaratnam S T, Xie W C. Lyapunov exponent and stochastic stability of coupled linear systems under real noise excitation, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1992, 59: 664-673
56 Zhu WQ, Huang ZL, Suzuki Y. Stochastic averaging and Lyapunov exponent of quasi partially integrable Hamiltonian systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, 37: 419-437
57 Zhu W Q, Huang Z L. Lyapunov exponents and stochastic stability of quasi-integrable- Hamiltonian systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1999, 66: 211-217
58 Zhu W Q. Lyapunov exponent and stochastic stability of quasi-non-integrable Hamiltonian systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2004, 39: 569-579
59 Ying Z G. Generalized Hamiltonian norm, Lyapunov exponent and stochastic stability for quasi-Hamiltonian systems. *Physics Letters A*, 2004, 333: 271-276
60 Liu Z H, Zhu W Q. Asymptotic Lyapunov stability with probability one of quasi-integrable Hamiltonian systems with delayed feedback control. *Automatica*, 2008, 44: 1923-1928

61 Huang Z L, Zhu W Q. A new approach to almost-sure asymptotic stability of stochastic systems of higher dimension. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, 38: 239-247

62 Kolmanovskii V B, Shaikhet L. General method of Lyapunov functionals construction for stability investigation of stochastic difference equations. In: Dynamical Systems and Applications. New Jersey: World Scientific Publishing, 1995. 397-439

63 Bao H B, Cao J D. Exponential stability for stochastic BAM networks with discrete and distributed delays. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 218: 6188-6199

64 Huang Z L, Jin X L, Zhu W Q. Lyapunov functions for quasi Hamiltonian systems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2009, 24(3): 374-381

65 Ling Q, Jin X L, Huang Z L. Stochastic stability of quasi-integrable Hamiltonian systems with time delay by using Lyapunov function method. *Science China-Technological Sciences*, 2010, 53(3): 703-712

66 Jin X L, Huang Z L, Chen G R, et al. Response of energy envelop in complex oscillator networks to external stochastic excitations. *Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical*, 2010, 43(27): 275101

RESPONSE AND STABILITY OF MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM NONLINEAR STOCHASTIC SYSTEMS*

JIN Xiaoling WANG Yong HUANG Zhilong†

Department of Engineering Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China

Abstract The response prediction and stability analysis are always hot topics of research in stochastic dynamics. Developing the method for response prediction of nonlinear stochastic systems and determining the qualitative behavior of the system response are of important significance and extensive application potential. This paper reviews response and stability of multi-degree-of-freedom nonlinear stochastic systems. Firstly, main methods for the response prediction of stochastic systems are outlined, such as Fokker-Planck-Kolmogorov equation, stochastic averaging method, equivalent linearization, equivalent nonlinear system procedure and Monte Carlo simulation. The advantages and disadvantages of these methods are discussed, respectively. The state-of-the-art of the exact stationary solutions and approximately nonstationary solutions is also illustrated for the multi-degree-of-freedom nonlinear stochastic systems. Then, two effective procedures to evaluate the stochastic stability, i.e., the Lyapunov function and Lyapunov exponent, are briefly presented. Based on these two methods, the stochastic stability of multi-degree-of-freedom nonlinear stochastic systems is outlined. Finally, some suggestions are given for further research on the response and stability of nonlinear stochastic systems.

Keywords multi-degree-of-freedom nonlinear system, stochastic response, stochastic stability, stochastic averaging, Fokker-Planck-Kolmogorov equation

黄志龙, 1965 年 3 月生, 浙江大学航空航天学院工程力学系教授, 现任浙江大学航空航天学院副院长, 力学系主任. 长期从事随机动力学与控制研究, 特别是随机激励的耗散的 Hamilton 系统理论方面的研究, 对随机动力学系统的精确平稳解、等效非线性系统法、随机平均法、随机稳定性、随机分岔、混沌、动态可靠性及随机最优控制各个方面都有研究, 已发表论文 90 余篇, 其中 SCI 收录 50 余篇, 以第二完成人完成的项目"随机激励的耗散的 Hamilton 系统理论"获 2002 年度国家自然科学奖二等奖及教育部 2001 年科技进步一等奖, 2005 年入选教育部新世纪优秀人才支持计划, 2008 年获全国优秀百篇博士论文, 2010 年获国家杰出青年基金.

* The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (1025211, 11002077, 11202181), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (Z6090125, LQ12A02001) and the Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (20110101110050).

† E-mail: zlhuang@zju.edu.cn

力 学 进 展

ADVANCES IN MECHANICS

(总第 183 期)

第 43 卷第 1 期

2013 年 1 月 25 日

目 次

结构和系统的动力学与控制专刊

· 封面图片说明 · 广义胞映射方法是研究确定性与随机动力系统的有力工具, 以往的一些改进方法在实际研究中仍存在一些不足, 主要是对动力系统流的全局演化信息反映的还不完整, 如与不稳定解 (鞍) 相关的不变流形的信息没有在图胞映射动力系统中得到反映. 作者对图胞映射方法进行了改进, 提出了图胞映射动力系统中状态空间的新型分类方法. 该方法通过引入新的概念, 解决了动力系统稳定流形和不稳定流形的图胞映射逼近问题. 详见徐伟、孙春燕、孙建桥、贺群文 p91.