

非光滑多体系统动力学数值算法的研究进展 *

王 琪[†] 庄方方 郭易圆 章 杰 房 杰

北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191

摘 要 非光滑多体系统动力学数值计算方法是多体系统动力学研究的重要内容之一. 本文介绍了近年来含摩擦与碰撞的非光滑多体系统动力学数值算法方面的研究进展. 首先, 讨论了库仑摩擦模型和修正的库仑摩擦模型, 以及具有单边和双边约束的多体系统中法向约束力的特点. 其次, 回顾了基于连续模型和非连续模型的多体系统动力学方程的数值计算方法, 详细介绍了基于互补概念的非光滑多体系统动力学的事件驱动法和时间步进法, 分析比较了相关的数值算法. 最后, 指出了一些需要进一步研究的问题.

关键词 摩擦, 碰撞, 非光滑, 多体系统

中图分类号: O313.7 文献标识码: A 文章编号: DOI: 10.6052/1000-0992-12-024

1 引 言

多体系统动力学是 20 世纪 70 年代发展起来的一门新兴学科, 它是研究由多个物体组成的机械系统的动力学问题. 20 世纪 70~80 年代, 多体系统动力学主要研究多刚体系统动力学问题^[1-3], 包括多体系统动力学的建模和相关的数值计算方法, 物体间的约束基本上是双边理想约束, 系统的动力学方程为常微分方程或微分-代数方程, 对于微分-代数方程的数值解法有增广法和缩并法. 随着科学技术的发展和应用领域的不断扩展, 多体系统动力学的研究对象逐步扩展到包含柔性体、液体的刚-柔-液耦合的多体系统, 通过利用离散化和等效模型等手段, 将刚-柔-液耦合的多体系统简化为有限维自由度的多体系统, 并有效地解决了刚体大位移与小变形相互耦合带来的建模和数值计算方面的困难^[4-8], 同时也促进了微分-代数方程数值计算方法的进一步发展^[9], 形成了相对完备的理论体系, 研发出了相应的多体系统动力学软件, 如 ADAMS 软件等^[10], 研究成果在航空、航天、机械和车辆等诸多领域得到了广泛的应用.

然而, 随着研究问题的不断深入和研究领域的不断扩展, 到了 20 世纪 90 年代和 21 世纪初, 非

光滑多体系统动力学成为该领域研究的热点问题之一. 非光滑多体系统动力学研究含有摩擦与碰撞的非理想约束变拓扑结构的多体系统. 如步行机器人在地面上行走、航天器的空中对接、机械手抓取工件和具有非理想约束铰链(考虑间隙与摩擦的滑移铰和转动铰)的机械系统等都存在物体间的接触与分离、滑移与黏滞等现象(称为非光滑事件). 由于这些非光滑事件的存在, 系统的动力学方程不连续或分段连续, 给非光滑事件的判断和动力学方程的求解带来了新的困难. 本文着重介绍近年来非光滑多体系统动力学数值计算方法的研究进展和发展趋势.

2 非光滑力学模型

所谓非光滑力学模型是指作用在物体上的力(包括约束力)是系统运动状态变量的非光滑函数, 即该函数或其导函数是状态变量的非连续函数或分段连续函数. 这里主要介绍作用在物体上的切向约束力(摩擦力)和法向约束力.

2.1 切向摩擦力

摩擦是一种复杂的非线性物理现象. 对于固

收稿日期: 2012-02-29, 修回日期: 2012-05-03

* 国家自然科学基金项目(11072014, 10832004)资助

[†] E-mail: bhwangqi@sina.com

体而言, 摩擦产生于具有相对运动或相对运动趋势的物体接触面之间, 摩擦力产生的机理以及摩擦对系统动力学行为影响的研究已有几百年的历史, 目前建立的摩擦模型已经有几十种, 如库仑摩擦、黏性摩擦(摩擦力的大小与相对速度有关且相对速度为0时摩擦力也为0)、Stribeck摩擦(摩擦力的大小与相对速度有关且在速度较低的范围时摩擦力随相对速度的增大而减小)等, 各有其自身特点和适用范围^[11]. 摩擦模型大致可分为干摩擦模型和有润滑剂的摩擦模型. 库仑摩擦模型是被普遍采用的干摩擦模型. 这里着重介绍库仑摩擦模型的数学描述及其特点.

2.1.1 库仑动滑动摩擦模型

当两个物体接触点的相对速度不为0时, 即 $v_r \neq 0$, 作用在物体上的摩擦力在切向上的投影 F_f 可表示为

$$F_f = -\mu F_N \text{sgn}(v_r) \quad (1)$$

其中 μ , F_N 分别是物体间的动滑动摩擦因数和法向约束力的大小, $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数. 由于物体接触点的相对速度不为0, 物体间有相对滑动, 即处于 slip 运动状态.

2.1.2 库仑静滑动摩擦模型

当两个物体接触点的相对速度和相对切向加速度均为0时, 即 $v_r = 0$, $a_{tr} = 0$, 且有相对滑动趋势时, 作用在物体上的摩擦力 F_f 可表示为

$$|F_f| \leq F_{f \max} = \mu_0 F_N \quad (2)$$

其中 μ_0 , F_N 分别是物体间的静滑动摩擦因数和法向约束力的大小. 当 $v_r = 0$, $a_{tr} = 0$, 此时物体接触点处于黏滞状态, 即 stick 状态. 式(2)表明, 当物体的接触点处于 stick 状态时, 作用在该接触点上的摩擦力的取值是在一个范围内, 其最大摩擦力的大小为 $F_{f \max} = \mu_0 F_N$, 式(2)反映出了摩擦的静态特性. 通常情况下, $\mu_0 > \mu$.

2.1.3 库仑摩擦模型的非光滑数学描述

以往库仑动滑动摩擦模型和静滑动摩擦模型是分别表示的, 如式(1)和式(2). 当物体接触点从 slip 状态到 stick 状态或从 stick 状态到 slip 状态转换时, 该式不易描述摩擦力与运动状态的关系. 随着现代非光滑动力学的发展^[12], 库仑摩擦模型可

表示成如下形式

$$F_f = \begin{cases} -\mu F_N \text{sgn}(v_r), & v_r \neq 0 \\ -\mu_0 F_N \text{sgn}(a_{tr}), & v_r = 0 \end{cases} \quad (3)$$

其中 a_{tr} 为接触点的相对切向加速度, $\text{Sgn}(\cdot)$ 为多值函数, 它可表示为^[13]

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ [-1, +1], & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

将式(4)带入式(3), 库仑摩擦模型可表示成

$$F_f = \begin{cases} -\mu F_N \text{sgn}(v_r), & v_r \neq 0, & \text{slip} \\ -\mu_0 F_N, & v_r = 0, a_{tr} > 0, & \text{slip} \\ [-\mu_0 F_N, +\mu_0 F_N], & v_r = 0, a_{tr} = 0, & \text{stick} \\ \mu_0 F_N, & v_r = 0, a_{tr} < 0, & \text{slip} \end{cases} \quad (5)$$

式(5)给出了摩擦力与物体接触点 stick-slip 运动状态的关系. 该式是关于接触点相对速度的分段连续函数, 且在相对速度等于0时, 不是单值函数, 而是多值函数, 此时, 摩擦力的取值是一个范围, 如图1所示. 含库仑摩擦的力学系统的微分方程是微分包含^[12] (differential inclusion) 或多值微分方程. 当物体接触点的相对速度不为0时, 摩擦力是系统状态变量的单值连续函数, 摩擦力的计算与系统动力学方程的求解均相对容易. 而当相对速度为0时, 摩擦力与相对切向加速度耦合. 当有一个摩擦点时, 其取值有3种可能, 若用试算法求解系统的动力学方程, 要用3个判断语句; 而当所研究的系统有 n 个摩擦点时, 要用到的判断语句的数量级将是 3^n , 当 n 较大时, 非光滑事件的判断与方程的求解相当困难.

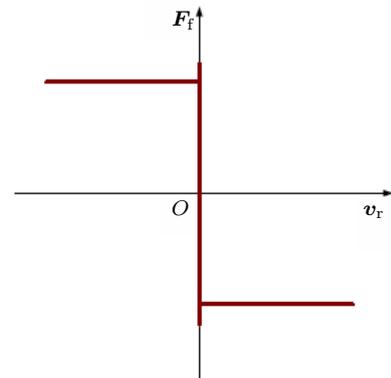


图1 库仑摩擦模型

2.1.4 修正的库仑摩擦模型

为了避免库仑摩擦力与相对切向加速度的耦合给数值计算带来的困难, 一些文献给出了几种库仑摩擦模型的修正方案, 这里只列出两种. 一种是用非线性函数对库仑摩擦模型进行修正, 可用下面的关系式表示^[14]

$$F_f = -\mu F_N \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{v_{r1}} |v_r|}\right) \text{sgn}(v_r) \quad (6)$$

其中 v_{r1} , α 为大于 0 的常值. 图 2 为 $v_{r1} = 0.02 \text{ m/s}$ 时, 不同的 α 值所对应的摩擦力与相对速度的关系曲线. 从图 2 可以看出, α 的值越大, 曲线越陡.

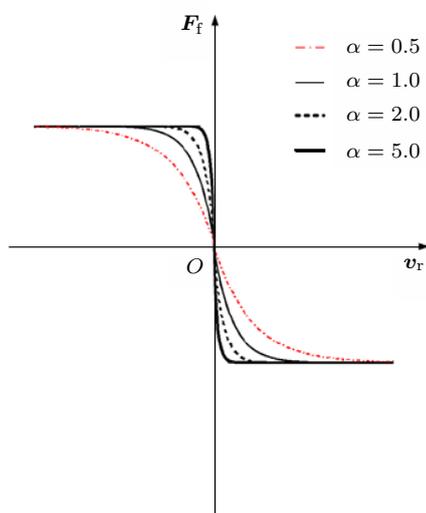


图 2 修正的库仑摩擦模型 1

另一种是用分段线性函数对库仑摩擦模型进行修正, 其关系式为^[14]

$$F_f = -\mu F_N c_d \text{sgn}(v_r) \quad (7)$$

其中 c_d 是关于 v_r 的分段函数

$$c_d = \begin{cases} 1, & |v_r| > v_1 \\ \frac{|v_r| - v_0}{v_1 - v_0}, & v_0 \leq |v_r| \leq v_1 \\ 0, & |v_r| < v_0 \end{cases}$$

其中 v_1 和 v_0 是常值, 该摩擦模型如图 3 所示.

由式 (7) 可以看出, 修正的库仑摩擦模型仅与相对速度有关, 而与相对切向加速度无关, 且当相对速度为 0 时, 摩擦力的大小也为 0. 当所研究的系统无 stick-slip 运动状态的切换时, 摩擦模型可近似地用修正的库仑摩擦模型来代替, 用该模型可避免数值计算方面的困难. 但是修正的库仑摩

擦模型不能反映摩擦的静态特性, 当所研究的系统有 stick-slip 运动状态的切换时, 摩擦模型就不能用修正的库仑摩擦模型. 刘丽兰等^[11]、Jonker 等^[15] 给出了机械系统中常见的摩擦模型, Tomlinson 等^[16] 还通过实验方法研究了人的手指与物体间的法向约束力和摩擦力的关系. 摩擦学是一个多学科交叉的研究领域, 关于摩擦模型的研究还在不断地深入和发展.

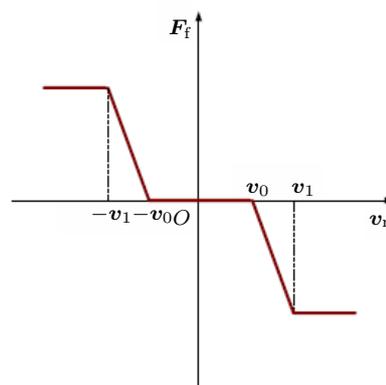


图 3 库仑摩擦模型 2

2.2 法向约束力

多体系统中物体间的法向约束力通常有两种力学模型, 一种是刚体模型, 另一种是局部柔性体模型. 其法向约束力的计算方法也各有不同, 下面给予分别介绍.

2.2.1 刚体模型的法向约束力的计算方法

对于具有双边约束的多体系统, 若其约束方程为

$$\Phi(q, t) = 0 \quad (8)$$

其中 $\Phi \in \mathbf{R}^s$, s 为独立的约束方程的个数, $q \in \mathbf{R}^n$ 为系统的广义坐标. 法向约束力的广义力可表示为

$$Q_{F_N} = \Phi_q^T \lambda \quad (9)$$

其中 Q_{F_N} 为法向约束力的广义力列向量, Φ_q 为约束方程的雅克比矩阵, λ 为 Lagrange 乘子列向量. 通常情况下, 约束力是 Lagrange 乘子的线性组合. 对于平面问题 (圆柱转动铰链和直线平移滑移铰), 若选取刚体的质心坐标和刚体相对惯性参考系的转角为系统的广义坐标, 按照递推法^[4] 列写多体系统的约束方程, 则一个 Lagrange 乘子对应一个约束力或一个约束力偶^[17-18]. 当约束方

程是限制点的线位移时, 对应的 Lagrange 乘子为约束力, 当约束方程是限制刚体的转动时, 对应的 Lagrange 乘子为约束力偶矩. 齐朝晖^[19] 还给出了空间铰链约束力的计算方法.

对于单边约束的多体系统, 取潜在的接触点 P_i 到约束面的距离 $g_{Ni}(\mathbf{q}, t) \geq 0$ 为系统的约束方程. 当 P_i 点与约束面接触且有相互作用时, $g_{Ni} = 0$, 作用在 P_i 点上的方向约束力的大小 $\lambda_{Ni} > 0$; 当 P_i 点与约束面分离无接触时, $g_{Ni} > 0$, 此时方向约束力的大小 $\lambda_{Ni} = 0$; 当 P_i 点与约束面间的距离为 0, 但未有相互作用时, 有 $g_{Ni} = 0, \lambda_{Ni} = 0$.

根据以上的分析可以发现 g_{Ni} 和 λ_{Ni} 具有互补关系^[20], 即

$$g_{Ni} \geq 0, \lambda_{Ni} \geq 0, g_{Ni} \cdot \lambda_{Ni} = 0 \quad (10)$$

当约束面对潜在的接触点产生约束作用时, 必有 $g_{Ni} = 0$. 若用第一类 Lagrange 方程建立系统的动力学方程, 其法向约束力的广义力为^[13]

$$\mathbf{Q}_{FN} = \mathbf{W}_N \boldsymbol{\lambda}_N \quad (11)$$

其中 \mathbf{W}_N 为约束方程 $g_{Ni} = 0$ 的雅克比矩阵的转置. $\boldsymbol{\lambda}_N$ 为作用在接触点 P_i 上的法向约束力的列向量, 该向量中的元素 λ_{Ni} 对应于单边约束 $g_{Ni}(\mathbf{q}, t) \geq 0$ 的法向约束力. 对于具有单边约束的多体系统, 由于取等式约束方程 $g_{Ni} = 0$ 的个数是随时间变化的, 因此是一个变拓扑结构的多体系统, $\mathbf{Q}_{FN}, \mathbf{W}_N, \boldsymbol{\lambda}_N$ 的维数也会随之变化.

2.2.2 局部柔性模型法向约束力的计算方法

局部柔性化模型是考虑物体的接触点附近的局部变形, 将方向约束力的大小表示成局部变形量 δ 以及 $\dot{\delta}$ 的非线性函数^[14]

$$F_N = \begin{cases} 0, & \delta = 0 \\ K\delta^\alpha + D\dot{\delta}, & \delta > 0 \end{cases} \quad (12)$$

其中, K 是与接触物体材料的性质和几何尺寸有关的常量, α 是与材料性质有关的常数, D 是与材料性质、变形量 δ 和初始碰撞速度 $\dot{\delta}^{(-)}$ 有关的量^[14]. 从式 (12) 可以看出, 由于 D 中含有 δ 和 $\dot{\delta}^{(-)}$, 因此法向约束力是关于 δ 和 $\dot{\delta}$ 的非线性函数. 物体是否接触或接触时的局部变形量 δ 及其变化率 $\dot{\delta}$ 可根据运动学关系用系统的广义坐标和广义速度来描述^[14]. 局部柔性化接触力模型常用于具有间隙的滑移铰和转动铰系统中物体的接触与碰撞问

题^[21]. 随着研究的不断深入, 接触力模型也在不断的完善^[22-23], 应用领域也在逐步扩展, 局部柔性化的接触力模型已经推广应用到人体膝关节骨骼间的接触力分析^[24].

3 非光滑动力学方程的数值算法

目前主要采用第一类 Lagrange 方程建立多体系统的动力学方程. 对于考虑接触、碰撞与摩擦的多体系统动力学方程的数值计算方法, 大致可分为两种: 一种是基于连续模型的数值计算方法, 另一种是基于非连续模型的数值计算方法, 后者也称为非光滑动力学方法 (non-smooth dynamical method). 下面分别介绍这两种数值计算方法的特点和研究进展.

3.1 基于连续模型的计算方法

对于一个多体系统, 将具有间隙且考虑摩擦与碰撞的转动铰和滑移铰 (称为非理想约束铰链) 的约束解除, 系统的广义坐标列向量为 \mathbf{q} . 这些非理想约束铰链的法向力用式 (12) 表示, 它是广义坐标和广义速度的单值连续函数; 摩擦力采用修正的库仑摩擦模型式 (6) 或式 (7), 则摩擦力也可表示成广义坐标和广义速度的单值连续函数. 设多体系统受到的双边理想约束的约束方程为 $\Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$, 则应用第一类 Lagrange 方程, 该系统的动力学方程可写成

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{G} \\ \Phi(\mathbf{q}, t) &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中, \mathbf{M} 为系统的广义质量矩阵, \mathbf{G} 中包含了非理想约束铰链的法向接触力和切向摩擦力的广义力. 该方程是微分-代数方程组, 由于 \mathbf{G} 只与系统的广义坐标 \mathbf{q} 、广义速度 $\dot{\mathbf{q}}$ 和时间 t 有关, 因此可直接用微分-代数方程组的数值计算方法求解该方程, 多数大型商用软件都是采用这样的建模方法和数值计算方法.

另一种求解方程 (13) 的方法是采用 Baumgarte 约束稳定化方法建立系统的动力学方程. 其动力学方程可表示成^[14]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \gamma - 2\alpha\dot{\Phi} - \beta^2\Phi \end{bmatrix} \quad (14)$$

同理, 由于方程 (14) 等号右端仅与系统的状态变量和时间 t 有关, 因此可用常微分方程的数值计算

方法求解该方程组. 由于接触点附近的局部变形量 δ 与物体的大位移相比是一个非常小的量, 因此在数值计算时积分步长 h 通常取得较小 ($h = 10^{-n}$, $n = 5, 6$). 另外, Baumgarte 约束稳定化系数 α 和 β 的取值不同, 违约修正的效果也有所不及^[25]. 目前该方法不仅用于研究含非理想铰链多刚体系统的动力学问题^[26-27] 及非理想铰链的磨损问题^[28], 还可将该方法与绝对节点坐标法结合用于研究含非理想铰链的柔性多体系统动力学问题^[29].

值得指出的是, 修正的库仑摩擦模型(连续化模型)仅适用于摩擦静态特性可以忽略不计的多体系统. 对于需要考虑摩擦静态特点的非光滑多体系统, 由于系统在运动过程中存在 stick-slip 运动状态的切换, 因此摩擦模型应采用能反映其动态和静态摩擦特性的力学模型, 如式(5)所示的库仑摩擦模型. 由于在该库仑摩擦模型中, 摩擦力与物体接触点的相对速度和加速度有关, 这时, 式(13)或式(14)中的广义力含有广义加速度(是关于广义加速度的多值函数), 不易通过数值积分方法直接求解其动力学方程.

3.2 基于非连续模型的数值计算方法

所谓非连续模型是指多体系统动力学方程是不连续的或是分段连续的. 导致不连续的原因有两个方面: 一是由于碰撞导致碰撞点的速度发生突变(系统的广义速度不连续); 另一个是由于摩擦力的非光滑性, 如两物体接触点的相对速度方向改变或 stick-slip 运动状态切换导致的摩擦力大小或方向发生突变(系统广义力不连续). 当多体系统的运动受到单边约束时, 不仅会产生碰撞, 同时还存在接触与分离的切换, 有效地通过数值方法判断系统在运动过程中的接触与分离和黏滞与滑移等运动状态的切换是非光滑多体系统动力学方程数值求解的重要内容之一.

设多体系统中潜在的接触点的个数为 n_G , 当所有潜在的接触点的距离函数 $g_{Ni} > 0$ 时, 系统的自由度为 k . 当部分潜在的接触点的距离函数 $g_{Ni} = 0$, 相当于系统添加了若干个双边约束, 系统的自由度将小于 k , 因此系统的自由度是随系统的接触状态的变化而变化的. 为了描述接触点的运动状态, 定义如下 4 个指标集(index set)^[30]

$$\left. \begin{aligned} I_G &= \{1, 2, \dots, n_G\} \\ I_S &= \{i \in I_G | g_{Ni} = 0\}, \text{ with } n_S \text{ elements} \\ I_N &= \{i \in I_S | \dot{g}_{Ni} = 0\}, \text{ with } n_N \text{ elements} \\ I_H &= \{i \in I_N | \dot{g}_{Ti} = 0\}, \text{ with } n_H \text{ elements} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中 \dot{g}_{Ti} 表示接触点的相对速度. n_S, n_N, n_H 不是常数, 是随着接触点运动状态的变化而变化的量. 应用第一类 Lagrange 方程, 具有单边约束且考虑接触点摩擦与碰撞的多体系统动力学方程可表示成^[30]

$$M(\mathbf{q}, t)\mathbf{q} = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, t) + \sum_{i \in I_S} (\mathbf{w}_N \lambda_N)_i + \sum_{i \in I_S} (\mathbf{w}_T \lambda_T)_i \quad (16)$$

其中等号右端的第 2 项为法向约束力的广义力, 第 3 项为切向摩擦力的广义力.

非光滑多体系统动力学方程求解的难点主要是非光滑事件(接触与分离、黏滞与滑移)的判断. 当非光滑事件个数少时, 可以用试算法进行判断^[31-33]; 当非光滑事件较多时, 判断的次数呈指数上升, 不易于编程计算. 为有效解决这一难点, 目前采用的方法有以下几种:

3.2.1 事件驱动法(event-driven schemes)

事件驱动法是多体系统动力学非光滑事件判断的方法之一, 主要用于判断接触点的 stick-slip 状态的转换以及接触点是否分离(detachment). 该方法在力-加速度层面表述了系统的法向接触定律、切向库仑摩擦定律和动力学方程.

3.2.1.1 法向约束的接触定律

根据单边约束的性质, 当 $g_{Ni} = 0, \dot{g}_{Ni} = 0$ 时, 作用在接触点的方向约束力的大小 λ_{Ni} 和潜在接触点的法向距离 g_{Ni} 对时间的二阶导数 \ddot{g}_{Ni} 满足下列互补关系^[19]

$$\ddot{g}_{Ni} \geq 0, \lambda_{Ni} \geq 0, \ddot{g}_{Ni} \cdot \lambda_{Ni} = 0, i \in I_N \quad (17)$$

这表明, 式(17)中的 $\ddot{g}_{Ni}, \lambda_{Ni}$ 均是大于等于 0 的, 只要其中的一个量大于 0, 另一个一定等于 0. 将上式用向量形式表示成

$$\ddot{\mathbf{g}}_N \geq 0, \boldsymbol{\lambda}_N \geq 0, \ddot{\mathbf{g}}_N^T \cdot \boldsymbol{\lambda}_N = 0 \quad (18)$$

式中的 $\ddot{\mathbf{g}}_N$ 可表示成系统广义坐标、广义速度、广义加速度和时间的函数, 用矩阵形式表示为^[19]

$$\ddot{\mathbf{g}}_N = \mathbf{W}_N^T \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{w}}_N, \in \mathbf{R}^{n_N} \quad (19)$$

其中 $\mathbf{W}_N^T, \bar{\mathbf{w}}_N$ 中的各元素是广义坐标、广义速度和时间的函数.

3.2.1.2 切向库仑摩擦定律

当两个物体保持接触时, 有 $g_{Ni} = 0, \dot{g}_{Ni} = 0$, 若接触点的相对速度不为 0 时, 即 $\dot{g}_{Ti} \neq 0$, 由库仑

摩擦定律可得, 接触点的摩擦力在切向的投影可表示为

$$\lambda_{Ti} = -\mu_i \lambda_{Ni} \operatorname{sgn}(\dot{g}_{Ti}), \quad i \in I_N \quad (20)$$

当两物体保持接触且相对速度为0时, 即 $g_{Ni} = 0$, $\dot{g}_{Ni} = 0$, $\dot{g}_{Ti} = 0$, 摩擦力在切向的投影与接触点相对切向加速度的关系式为

$$\left. \begin{aligned} |\lambda_{Ti}| < \mu_{0i} \lambda_{Ni} &\Rightarrow \ddot{g}_{Ti} = 0 \\ \lambda_{Ti} = +\mu_{0i} \lambda_{Ni} &\Rightarrow \ddot{g}_{Ti} < 0 \\ \lambda_{Ti} = -\mu_{0i} \lambda_{Ni} &\Rightarrow \ddot{g}_{Ti} > 0 \end{aligned} \right\} \quad i \in I_H \quad (21)$$

上式中的第一式表明接触点处于stick状态, 后两式表明接触点从stick状态转换到slip状态, 或仍然处于slip状态(只是相对切向加速度的方向发生改变). 为便于判断stick-slip状态的转换, 定义接触点的正向与负向相对切向加速度, 并引入正向与负向摩擦余量(friction saturation)的概念^[30].

正向与负向相对切向加速度定义为

$$\ddot{g}_{Ti}^+ = \frac{1}{2}(|\ddot{g}_{Ti}| + \ddot{g}_{Ti}), \quad i \in I_H \quad (22)$$

$$\ddot{g}_{Ti}^- = \frac{1}{2}(|\ddot{g}_{Ti}| - \ddot{g}_{Ti}), \quad i \in I_H \quad (23)$$

上面两式相减并写成向量形式

$$\ddot{\mathbf{g}}_H = \ddot{\mathbf{g}}_H^+ - \ddot{\mathbf{g}}_H^- \quad (24)$$

其中 $\ddot{\mathbf{g}}_H^+ = \{\ddot{g}_{Ti}^+\}$, $\ddot{\mathbf{g}}_H^- = \{\ddot{g}_{Ti}^-\}$, $\ddot{\mathbf{g}}_H = \{\ddot{g}_{Ti}\} \in R^{n_H}$, 相对切向速度为0时接触点的相对切向加速度可表示为

$$\ddot{\mathbf{g}}_H = \mathbf{W}_H^T \ddot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{w}}_H \in R^{n_H} \quad (25)$$

正向与负向摩擦余量定义如下^[30]

$$\lambda_{H0i}^+ = \mu_{0i} \lambda_{Ni} + \lambda_{Hi}, \quad i \in I_H \quad (26)$$

$$\lambda_{H0i}^- = \mu_{0i} \lambda_{Ni} - \lambda_{Hi}, \quad i \in I_H \quad (27)$$

其中 λ_{Hi} ($i \in I_H$) 为接触点相对切向速度为零时的摩擦力. 应用库仑静滑动摩擦力多值函数的表示式可以证明: 接触点的正(负)向加速度和正(负)向摩擦余量具有互补关系, 即

$$\ddot{g}_{Ti}^+ \geq 0, \quad \lambda_{H0i}^+ \geq 0, \quad \ddot{g}_{Ti}^+ \cdot \lambda_{H0i}^+ = 0, \quad i \in I_H \quad (28)$$

$$\ddot{g}_{Ti}^- \geq 0, \quad \lambda_{H0i}^- \geq 0, \quad \ddot{g}_{Ti}^- \cdot \lambda_{H0i}^- = 0, \quad i \in I_H \quad (29)$$

将式(26)和式(27)用矩阵形式表示

$$\boldsymbol{\lambda}_{H0}^+ = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_H \boldsymbol{\lambda}_N + \boldsymbol{\lambda}_H \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{H0}^- = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_H \boldsymbol{\lambda}_N - \boldsymbol{\lambda}_H \quad (31)$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_H = \operatorname{diag}\{\mu_{0i}\}$, $i \in I_H$, 式(30)和式(31)相加可得

$$\boldsymbol{\lambda}_{H0}^+ = 2\tilde{\boldsymbol{\mu}}_H \boldsymbol{\lambda}_N - \boldsymbol{\lambda}_{H0}^- \quad (32)$$

将互补关系式(28)和式(29)用向量形式表示为

$$\ddot{\mathbf{g}}_H^+ \geq 0, \quad \boldsymbol{\lambda}_{H0}^+ \geq 0, \quad (\ddot{\mathbf{g}}_H^+)^T \boldsymbol{\lambda}_{H0}^+ = 0 \quad (33)$$

$$\ddot{\mathbf{g}}_H^- \geq 0, \quad \boldsymbol{\lambda}_{H0}^- \geq 0, \quad (\ddot{\mathbf{g}}_H^-)^T \boldsymbol{\lambda}_{H0}^- = 0 \quad (34)$$

再将多体系统的动力学方程进一步表示成

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) + \mathbf{W}_N \boldsymbol{\lambda}_N + \tilde{\mathbf{W}}_G \boldsymbol{\lambda}_N + \mathbf{W}_H \boldsymbol{\lambda}_H \quad (35)$$

其中等式右端的第2项为法向约束力的广义力, 第3项为动滑动摩擦力($\dot{g}_{Ti} \neq 0$)的广义力, 最后一项为静滑动摩擦力($\dot{g}_{Ti} = 0$)的广义力.

应用动力学方程(35)以及式(19), (24), (25)和(32), 可将stick-slip转换的判断以及detachment的判断转换成下列线性互补问题的求解

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}; \quad \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_N \\ \boldsymbol{\lambda}_{H0}^- \\ \ddot{\mathbf{g}}_H^+ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{g}}_N \\ \ddot{\mathbf{g}}_H^- \\ \boldsymbol{\lambda}_{H0}^+ \end{bmatrix}.$$

利用线性互补的数值计算方法, 求解出 $\boldsymbol{\lambda}_N$ 、 $\boldsymbol{\lambda}_{H0}^-$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_{H0}^+$, 将其代入式(30)或(31), 求出 $\boldsymbol{\lambda}_H$. 再将 $\boldsymbol{\lambda}_N$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_H$ 代入式(35), 应用常微分方程的数值解法求解该方程, 可求出系统下一步的状态变量. 以此往复循环, 就可求解系统的动力学方程.

事件驱动法可以有效地判断接触点stick-slip状态的转换和接触点是否分离, 但不能判断物体是否发生接触. 因为接触时物体间通常发生碰撞, 速度发生突变, 不易从力-加速度层面研究碰撞问题.

Flores等^[21]应用连续化的模型, 通过数值仿真分析了具有间隙的非理想滑移铰的多体系统动力学特性, 发现当间隙充分小时, 滑块与滑道的两侧呈现周期性的接触, 滑块与滑道间的碰撞与冲击几乎可以忽略. 当滑移铰的间隙充分小时, 滑移

较可视为双边约束. 彭慧莲等^[34]将事件驱动法推广到具有双边约束含摩擦滑移铰的非光滑多刚体系统动力学方程的数值求解, 建立了双边约束两个法向约束力的互补关系, 利用摩擦余量与相对切向加速度的互补关系, 将双边约束法向约束力的切换与 stick-slip 状态切换的判别转换成水平线性互补问题^[35]的求解. 所谓水平线性互补问题是求解满足下列关系式的向量 \mathbf{x}, \mathbf{y}

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1 \mathbf{y} &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}^T \mathbf{y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

韩继业等^[35]给出了线性和非线性互补问题的有关定义、解的存在性、唯一性和解集的有界性的相关定理. 为提高互补问题数值求解精度, 人们还在不断完善相关的数值计算方法^[36].

事件驱动法存在约束漂移问题(即约束违约)^[37], Wang 等^[38]将 Baumgarte 约束稳定化方法应用于非光滑多体系统动力学的事件驱动法, 有效地抑制了约束漂移问题.

3.2.2 时间步进法 (time-stepping method)

时间步进法是在冲量-速度层面建立系统的动力学方程和采用相应的数值计算方法^[39-40]. 该方法可用于研究物体接触与碰撞时非光滑多体系统动力学方程的求解. 最初人们将碰撞过程分为压缩过程和恢复过程, 设碰撞的时间历程非常短, 在碰撞过程中忽略常规力的作用效应; 应用牛顿和泊松接触定律, 根据单边约束的特点, 给出了相关物理量的互补关系, 应用线性互补方法确定系统的接触、碰撞、分离以及 stick-slip 运动状态的切换, 对非碰撞阶段还应用事件驱动法求解^[19]. 其他学者^[13,30,39-40]逐步完善了原有的方法, 给出了一种既适用于碰撞过程也适用于非碰撞过程的非光滑多体系统动力学的数值求解方法(时间步进算法). 该方法是将动力学方程表示成速度-冲量形式

$$\mathbf{M}_M(\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_A) - \mathbf{h}_M \Delta t - \mathbf{W}_{NM} \mathbf{P}_N - \mathbf{W}_{TM} \mathbf{P}_T = \mathbf{0} \quad (38)$$

其中, Δt 为积分步长, 下标 A 和 E 分别为该积分步长的初始点和终止点 ($t_E = t_A + \Delta t$), 下标 M 为积分步长的中点 ($t_M = t_A + 0.5\Delta t$), \mathbf{P}_N 和 \mathbf{P}_T 为接触点法向和切向约束力在该积分步长下的冲量. 在时刻 t_A 和时刻 t_E 接触点的法向和相对切向速度

可分别表示为

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{NA} &= \mathbf{W}_{NM}^T \mathbf{u}_A + \tilde{\mathbf{w}}_{NM} \\ \gamma_{TA} &= \mathbf{W}_{TM}^T \mathbf{u}_A + \tilde{\mathbf{w}}_{TM} \\ \gamma_{NE} &= \mathbf{W}_{NM}^T \mathbf{u}_E + \tilde{\mathbf{w}}_{NM} \\ \gamma_{TE} &= \mathbf{W}_{TM}^T \mathbf{u}_E + \tilde{\mathbf{w}}_{TM} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

法向冲量与法向速度具有互补关系

$$\mathbf{P}_N \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}_N \geq \mathbf{0}, \mathbf{P}_N^T \boldsymbol{\xi}_N = 0 \quad (40)$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_N = \gamma_{NE} + \varepsilon_N \gamma_{NA}$, ε_N 为法向碰撞恢复系数的对角矩阵. 用该互补关系可判断接触或分离. 冲量形式的摩擦余量 (impulsive friction saturation) 定义为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}_R &= \boldsymbol{\mu} \mathbf{P}_N + \mathbf{P}_T \\ \mathbf{P}_L &= \boldsymbol{\mu} \mathbf{P}_N - \mathbf{P}_T \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

其中 $\boldsymbol{\mu}$ 为接触点摩擦因数的对角矩阵(设动摩擦因数和静摩擦因数相等), 与之相应的相对切向速度定义为

$$\boldsymbol{\xi}_T = \boldsymbol{\xi}_R - \boldsymbol{\xi}_L \quad (42)$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_T = \gamma_{TE} + \varepsilon_T \gamma_{TA}$, ε_T 为切向恢复系数的对角矩阵. 由此得到以下的互补关系

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_R \geq \mathbf{0}, \mathbf{P}_R \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}_R^T \mathbf{P}_R &= 0 \\ \boldsymbol{\xi}_L \geq \mathbf{0}, \mathbf{P}_L \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}_L^T \mathbf{P}_L &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

用该互补关系可判断 stick-slip 的转换.

将接触-分离、stick-slip 运动状态的判断转化成下面线性互补方程的求解

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^T \mathbf{x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_N \\ \mathbf{P}_R \\ \boldsymbol{\xi}_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_N \\ \boldsymbol{\xi}_R \\ \mathbf{P}_L \end{bmatrix}$$

每积分一步, 需计算求解一次式(44)所描述的线性互补问题. 该方法既可以判断潜在接触点的接触与分离, 也可判断接触点的 stick-slip 运动状态的转换. 其不足之处是接触点的动、静摩擦因数要取相同的值, 这与库仑摩擦模型有一定的差别(通常静摩擦因数大于动摩擦因数). 该方法同样也存在约束违约问题(即约束漂移问题)^[13]. Anitescu 等^[41]给出了一种约束违约的修正算法, 对约束漂移起到了抑制作用.

段文杰等^[42]应用时间步进法, 对被动行走器^[43-44]进行了非光滑动力学数值仿真研究, 有效

地分析了摩擦因数和碰撞恢复系数对被动行走器动力学特性的影响, 而用传统方法无法分析恢复系数和摩擦因数对被动行走器动力学特性的影响. 高海平^[45] 将该方法推广到具有单-双边约束的非光滑多体系统; Zhang等^[46]、Theodosiou等^[47] 将该方法推广到含单边约束的非光滑柔性多体系统.

Acary等^[48] 详细论述了非光滑动力学的多种数值计算方法, 不仅有力学中的非光滑动力系统的数值计算方法, 还有电子线路中的非光滑动力系统的数值计算方法.

3.2.3 其他数值算法

董富祥等^[49] 利用第一类Lagrange方程和有限元法建立了柔性多体系统正碰撞的动力学方程, 根据物体接触和碰撞时接触区域具有的几何性质, 给出了碰撞时速度突变的协调关系式. 设无碰撞时系统的动力学方程为

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ Q_1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

当物体间有接触和碰撞时, 系统的动力学方程为

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T & C^T \\ \Phi_q & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ Q_1 \\ Q_N \end{bmatrix} \quad (46)$$

其中 C 为物体接触处的法向约束对应的雅可比矩阵, λ_N 为物体接触处的法向约束力向量. 该方法可有效地分析柔性多体系统正碰撞问题. 韩石磊等^[50] 在此基础上, 与非线性有限元结合, 给出了一种多变量方法, 并通过数值仿真与实验等手段验证了该方法的有效性.

Arczewski等^[51] 研究了考虑摩擦的车辆动力学问题. 当不考虑摩擦时, 其动力学方程可表示成

$$\left. \begin{aligned} Mq &= -\Phi_q^T \lambda + Q \\ \Phi(q, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

当系统只有动滑动摩擦(相对速度不为0)时, 其动力学方程为

$$\left. \begin{aligned} Mq &= -\Phi_q^T \lambda + Q + Q_T(\lambda) \\ \Phi(q, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

其中, $Q_T(\lambda)$ 是滑动摩擦力的广义力, 若系统既有动滑动摩擦, 又有静滑动摩擦(相对速度为0)时,

将处于静滑动摩擦状态的物体视为又受到了新的约束 $\Phi_T(q, t) = 0$, 其动力学方程为

$$\left. \begin{aligned} Mq &= -\Phi_q^T \lambda - \Phi_{Tq}^T \lambda_T + Q + Q_T(\lambda, \lambda_T) \\ \Phi(q, t) &= 0 \\ \Phi_T(q, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

若 λ_i 是法向约束力, λ_{Ti} 是切向静滑动摩擦力, 只有当所有的 $|\lambda_{Ti}| \leq \mu_{0i} \lambda_i$ 均成立时, 约束 $\Phi_T(q, t) = 0$ 才成立. 实际上, 该方法也是一种试算法.

赵振等^[52] 研究了三维含摩擦多刚体碰撞问题的数值计算方法. 该问题的困难在于碰撞过程中切向运动的方向会随着法向冲量的变化而变化, 为正确确定碰撞后的总冲量必须利用数值计算的方法来精细地刻画碰撞过程. 该文基于Lagrange方法和Keller处理空间的两刚体碰撞问题的思路, 将多刚体系统单点碰撞问题描述为以法向冲量为独立变量的碰撞动力学方程, 给出了一种求解三维含摩擦多刚体系统碰撞问题的有效数值方法.

Leonesio等^[53] 利用库仑摩擦模型研究了某一类机械系统的自锁问题, 用数值方法可给出系统的自锁区域. Fraczek等^[54] 研究了具有多余约束含摩擦机械系统的动力学问题. Pfeiffer^[55] 综述了事件驱动法、时间步进法和增广的Lagrange法(augmented lagrange method), 该文献认为增广的Lagrange法优于基于互补概念的事件驱动法和时间步进法.

4 总结和展望

本文简要介绍了由于考虑摩擦与碰撞导致多体系统动力学方程不连续而带来的数值计算方面的问题以及近年来非光滑多体系统动力学数值算法的研究成果. 本文着重介绍了库仑摩擦模型与修正的库仑摩擦模型的特点、单-双边约束法向接触力的特点和非光滑多体系统动力学方程的特点; 较详细地介绍了基于连续模型和非连续模型多体系统动力学的数值计算方法, 着重介绍了基于互补概念的非光滑多体系统动力学的事件驱动法和时间步进法; 简要介绍了其他相关的数值计算方法; 分析并比较了各种模型和数值方法的特点. 在此基础上, 作者认为, 今后可以进一步研究的内容有:

(1) 提高非光滑多体系统动力学方程数值算法的计算精度和速度. 对于光滑的多体系统, 可用隐式数值计算方法提高动力学方程数值求解的精度; 而对于非光滑多体系统, 由于动力学方程不连续, 约束力发生突变, 会给数值计算带来一定的困难. 当摩擦力的广义力可以表示成 Lagrange 乘子(法向约束力)的线性函数时, 动力学方程是广义加速度和 Lagrange 乘子的线性代数方程, 可用线性代数方程数值求解方法或线性互补算法求解出 Lagrange 乘子, 然后用隐式数值计算方法求解系统的动力学方程. 但是当摩擦力的广义力表示成 Lagrange 乘子的非线性函数时, 动力学方程是关于广义加速度和 Lagrange 乘子的不连续的非线性代数方程, 在非光滑事件判断和隐式数值计算方面均还存在一定的困难.

(2) 考虑二维摩擦或面摩擦和线碰撞或面碰撞的非光滑多体系统动力学的数值算法研究. 目前多数研究成果涉及的是一维摩擦或点摩擦和点碰撞的非光滑多体系统动力学的数值算法问题. 如何建立二维摩擦或面摩擦和线碰撞或面碰撞的简化模型; 如何建立和求解相应的动力学方程是值得进一步研究的问题.

(3) 利用现代非光滑动力系统的基本理论与方法分析非光滑多体系统动力学行为. 目前常用计算 Poincare 截面和 Lyapunov 指数等方法分析复杂非线性系统的动力学行为. 如何用解析和数值相结合的方法分析非光滑多体系统动力学行为也是值得进一步研究的问题.

本文仅对非光滑多体系统动力学中的部分算法进行了总结和综述, 关于非光滑多体系统动力学其他方面的研究成果也有相关的综述文献[56-61]可供参考.

参考文献

- 1 维滕伯格, 著. 多刚体系统动力学. 谢传锋译. 北京航空航天大学出版社, 1986
- 2 袁世杰. 多刚体系统动力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1988
- 3 Kane T R, Likins P W, Levinson D A, 著. 航天飞行器动力学. 黄克累, 张安厚译. 北京: 科学出版社, 1988
- 4 洪嘉振. 计算多体系统动力学. 北京: 高等教育出版社, 2001
- 5 Shabana A A. Dynamics of Multibody Systems. London: Cambridge University Press, 2005
- 6 潘振宽, 赵维加, 洪嘉振, 等. 多体系统动力学微分/代数方程组数值方法. 力学进展, 1996, 26(1): 28-40
- 7 王琪, 陆启韶. 多体系统 Lagrange 方程数值算法的研究进展. 力学进展, 2001, 31(1): 9-17
- 8 Yang H, Hong J Z. Dynamics modeling of a flexible hub-beam system with a tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 266: 759-774
- 9 Ascher U M, Petzold L R. Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations. 北京: 科学出版社, 2009
- 10 洪嘉振, 刘锦阳. 机械系统计算动力学与建模. 北京: 高等教育出版社, 2011
- 11 刘丽兰, 刘宏昭, 吴子英, 等. 机械系统中摩擦模型的研究进展. 力学进展, 2008, 38(2): 200-213
- 12 Kunze M. Non-Smooth Dynamical Systems. New York: Springer, 2000
- 13 Flores P, Leine R, Glocker C. Modeling and analysis of planar rigid multibody systems with translational clearance joints based on the non-smooth dynamics approach. *Multibody System Dynamics*, 2010, 23: 165-190
- 14 Flores P, Ambrósio J, Pimenta Claro J C, et al. Kinematics and Dynamics of Multibody Systems with Imperfect Joints. New York: Springer, 2008
- 15 Jonker J B, Waiboer R R, Aarts R G K M. Modelling of Joint Friction in Robotic Manipulators with Gear Transmissions, *Multibody Dynamics. Computational Methods and Applications*, Netherlands: Springer, 2007. 221-243
- 16 Tomlinson S E, Lewis R, Carré M J. The effect of normal force and roughness on friction in human finger contact. *Wear*, 2009, 267: 1311-1318
- 17 彭慧莲, 郭易圆, 王琪. 用第一类 Lagrange 方程求解平面多体系统约束力的方法. 工程力学, 2008, 25(12): 65-71
- 18 Blajer W. On the determination of joint reactions in multibody mechanisms. *Journal of Mechanical Design*, 2004, 126: 341-350
- 19 齐朝晖. 多体系统动力学. 北京: 科学出版社, 2008
- 20 Pfeiffer F, Glocker C. Multibody Dynamics with Unilateral Contacts. New Jersey: John Wiley & Sons. Inc., 1996
- 21 Flores P, Ambrósio J, Pimenta Claro J C, et al. Translational joints with clearance in rigid multibody systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2008, (3): 011007(1-10)
- 22 Kosenko I, Aleksandrov E. Volumetric modification of the Hertz contact problem and its application to the multibody dynamics simulation. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2009, 23: 931-937
- 23 Bai Z F, Zhao Y. Dynamic behavior analysis of planar mechanical systems with clearance in revolute joints using a new hybrid contact force model. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2012, (54): 190-205
- 24 Machado M, Flores P, Pimenta Claro J C, et al. Development of a planar multibody model of the human knee joint. *Nonlinear Dyn.*, 2010, 60: 459-478
- 25 Flores P, Pereira R, Machado M, et al. Investigation on the Baumgarte stabilization method for dynamic analysis of constrained multibody systems. *Proceedings of EUCOMES*, 2008. 305-312
- 26 陈萌, 张新访, 张云清, 等. 对接机构隔框锁的接触碰撞动力学研究及仿真. 宇航学报, 2002, 3(6): 43-49
- 27 Ambrósio J, Verissimo P. Improved bushing models for general multibody systems and vehicle dynamics. *Multibody Systems Dynamics*, 2009, 22: 341-365
- 28 Flores P. Modeling and simulation of wear in revolute clearance joints in multibody systems. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44: 1211-1222
- 29 Tian Q, Zhang Y Q, Chen L P, et al. Simulation of planar flexible multibody systems with clearance and lubricated revolute joints. *Nonlinear Dyn*, 2010, 60: 489-511
- 30 Leine R I, VanCampen D H, Glocker C. Nonlinear dynamics and modeling of various wooden toys with impact and friction. *Journal of Vibration and Control*, 2003, 9: 25-78
- 31 Piedboeuf J, Carufel J, Hurteau R. Friction and stick-slip in robots: Simulation and Experimentation. *Multibody System Dynamics*, 2000, 4: 341-354

- 32 Nozaki K, Terumichi Y, Nishimura K, et al. Study of rocking motion of rigid body with slide contact. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2009, 23: 1001-1007
- 33 彭慧莲, 王士敏, 王琪, 等. 具有固定双边约束多点摩擦的多体系统的动力学建模和数值算法. *力学学报*, 2009, 41(1): 105-111
- 34 彭慧莲, 王琪, 庄方方. 含摩擦滑移铰平面多刚体动力学的 HLCP 方法. *力学学报*, 2010, 42(5): 943-950
- 35 韩继业, 修乃华, 戚厚铎. 非线性互补理论与算法. 上海: 上海科学出版社, 2006
- 36 张培爱, 何素艳, 张兴新. 互补问题的一种光滑迭代算法. *大连理工大学学报*, 2003, 43(1): 16-19
- 37 Pfeiffer F, Foerg M, Ulbrich H. Numerical aspects of non-smooth multibody dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195: 6891-6908
- 38 Wang Q, Peng H L, Zhuang F F. A constraint-stabilized method for multibody dynamics with friction-affected translational joints based on HLCP. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, 2011, 16(2): 589-605
- 39 Moreau J J. Numerical aspects of the sweeping process. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, 177: 329-349
- 40 Brogliato B, Dam A A, Paoli L, et al. Numerical simulation of finite dimensional multibody non-smooth mechanical systems. *Applied Mechanics Reviews*, 2002, 55(2): 107-150
- 41 Anitescu M, Hart G D. A constraint-stabilized time-stepping approach for rigid multibody dynamics with joints, contact and friction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 60: 2335-2371
- 42 段文杰, 王琪, 王天舒. 圆弧足被动行走器非光滑动力学仿真研究. *力学学报*, 2011, 43(4): 765-774
- 43 Collins S, Ruina A, Tedrake R, et al. Efficient bipedal robots based on passive-dynamic walkers. *Science Magazine*, 2005, 307(5712): 1082-1085
- 44 Liu N, Li J F, Wang T S. The effects of parameter variation on the gaits of passive walking models: simulations and experiments. *Robotica*, 2009, 27(4): 511-528
- 45 高海平. 受约束多体系统线性互补建模及相关问题研究. [博士论文]. 北京: 北京航空航天大学, 2010
- 46 Zhang H W, Li J Y, Pan S H. New second-order cone linear complementarity formulation and semi-smooth Newton algorithm for finite element analysis of 3D frictional contact problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 2011, 200: 77-88
- 47 Theodosiou C, Natsiavas S. Dynamics of finite element structural models with multiple unilateral constraints. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2009, 44: 371-382
- 48 Acary V, Brogliato B. Numerical Methods for Non-smooth Dynamical Systems-Applications in Mechanics and Electronics. Berlin: Springer, 2008
- 49 董富祥, 洪嘉振. 平面柔性多体系统正碰撞动力学建模理论研究. *计算力学学报*, 2010, 27(6): 1042-1048
- 50 韩石磊, 洪嘉振. 柔性多体碰撞问题的多变量方法. *力学学报*, 2011, 43(5): 886-893
- 51 Arczewski K, Fraczek J. Friction models and stress recovery methods in vehicle dynamics modelling. *Multibody System Dynamics*, 2005, 14: 205-224
- 52 赵振, 刘才山, 陈滨. 三维含摩擦多刚体碰撞问题的数值计算. *中国科学 G 辑*, 2006, 36(1): 72-88
- 53 Leonesio M, Bianchi G. Self-locking analysis in closed kinematic chains. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44: 2038-2052
- 54 Fraczek J, Wojtyra M. On the unique solvability of a direct dynamics problem for mechanisms with redundant constraints and Coulomb friction in joints. *Mechanism and Machine Theory*, 2011, 46: 312-334
- 55 Pfeiffer F. On impacts with friction. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 217: 1184-1192
- 56 刘才山, 陈滨. 多柔体系统碰撞动力学研究综述. *力学进展*, 2000, 30(1): 7-14
- 57 董富祥, 洪嘉振. 多体系统动力学碰撞问题研究综述. *力学进展*, 2009, 39(3): 352-359
- 58 胡海岩. 分段非光滑机械系统动力学的进展. *振动工程学报*, 1995, 8(4): 331-341
- 59 金栋平, 胡海岩. 碰撞振动及其典型现象. *力学进展*, 1999, 29(2): 155-164
- 60 韩石磊, 洪嘉振. 柔性多体系统接触/碰撞动力学的若干关键问题. *力学与实践*, 2011, 33(2): 1-7
- 61 丁旺才, 谢建华. 碰撞振动系统分岔与混沌的研究进展. *力学进展*, 2005, 35(4): 513-524

ADVANCES IN THE RESEARCH ON NUMERICAL METHODS FOR NON-SMOOTH DYNAMICS OF MULTIBODY SYSTEMS*

WANG Qi[†] ZHUANG Fangfang GUO Yiyuan ZHANG Jie FANG Jie

School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China

Abstract The numerical method for the non-smooth dynamics of multibody systems is one of the hot topics of researches on the dynamics of multibody systems. In this paper, recent advances in the research on numerical methods are presented for the non-smooth dynamics of multibody systems with impact and friction. First, the Coulomb friction model, modified Coulomb friction model and the characteristics of the normal forces of multibody systems with unilateral and bilateral constraints are discussed. Second, recently developed numerical methods for the non-smooth dynamics of multibody systems based on continuous and discontinuous models are reviewed. The Event-driven scheme and time-stepping method for the non-smooth dynamics of multibody systems are described in detail based on the complementarity concept. These numerical methods are then analysed and compared. Finally, the problems in need of further studies are pointed out.

Keywords friction, impact, non-smooth, multibody system



王琪, 1959 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事多体系统动力学数值算法研究. 兼任中国力学学会理事, 中国力学学会动力学与控制专业委员会委员和教育工作委员会委员, 多体系统动力学专业组组长, 《动力学与控制学报》编委.

* The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (11072014, 10832004).

[†] E-mail: bhwangqi@sina.com



力学进展

ADVANCES IN MECHANICS

(总第 183 期)

第 43 卷第 1 期

2013 年 1 月 25 日

目次

结构和系统的动力学与控制专刊

序	陆启韶 张 伟 (1)
时滞动力系统的稳定性与分岔: 从理论走向应用	王在华 胡海岩 (3)
时滞反馈控制的若干问题	蔡国平 陈龙祥 (21)
时滞车辆跟驰模型及其分岔现象	徐 鉴 徐荣改 (29)
拟哈密顿系统非线性随机最优控制	朱位秋 应祖光 (39)
多自由度非线性随机系统的响应与稳定性	金肖玲 王 永 黄志龙 (56)
高维非线性系统的全局分岔和混沌动力学研究	张 伟 姚明辉 张君华 李双宝 (63)
胞映射方法的研究和进展	徐 伟 孙春燕 孙建桥 贺 群 (91)
非光滑多体系统动力学数值算法的研究进展	王 琪 庄方方 郭易圆 章 杰 房 杰 (101)
机械系统摩擦动力学的一些问题	丁 千 翟红梅 (112)
转子与定子碰摩的非线性动力学研究	江 俊 陈艳华 (132)
生物神经元系统同步转迁动力学问题	王青云 张红慧 (149)
具有刚-柔-液-控耦合的航天器动力学研究进展	岳宝增 宋小娟 (163)
绳系卫星在轨试验及地面物理仿真进展	陈 辉 文 浩 金栋平 胡海岩 (174)

· 封面图片说明 · 广义胞映射方法是研究确定性与随机动力系统的有力工具, 以往的一些改进方法在实际研究中仍存在一些不足, 主要是对动力系统流的全局演化信息反映的还不完整, 如与不稳定解(鞍)相关的不变流形的信息没有在图胞映射动力系统中得到反映. 作者对图胞映射方法进行了改进, 提出了图胞映射动力系统中状态空间的新型分类方法. 该方法通过引入新的概念, 解决了动力系统稳定流形和不稳定流形的图胞映射逼近问题. 详见徐伟、孙春燕、孙建桥、贺群文 p91.