

胞映射方法的研究和进展*

徐 伟^{1,†} 孙春艳¹ 孙建桥^{2,3} 贺 群⁴

¹ 西北工业大学, 西安 710072

² 美国加州大学 Merced 分校, Merced, CA95340, USA

³ 天津大学力学系, 天津 300072

⁴ 西安武警技术学院, 西安 710086

摘 要 介绍了胞映射方法的研究和进展. 归纳了目前胞映射方法的几种主要研究方法, 主要包括简单胞映射、广义胞映射、图胞映射、图胞映射的符号分析方法、图胞映射的面向集合方法、邻接胞映射、庞加莱型的简单胞映射、插值胞映射以及胞参照点映射方法, 分析了各类方法的基本特点和特色, 简述了这几种胞映射方法的最新国内外进展, 综述了胞映射方法在控制及相关领域的应用研究及进展, 给出了胞映射方法研究的一些展望, 提出了胞映射方法研究可能率先突破的几个研究方向.

关键词 胞映射方法, 全局分析, 控制及相关领域

中图分类号: O175.1

文献标识码: A

文章编号: DOI:10.6052/1000-0992-12-022

1 引 言

非线性系统的动力学特性分析^[1-3], 根据对小邻域和大范围等空间区域的不同考虑, 可分为局部分分析和全局分析. 局部分分析通常关注的是周期解和解的稳定性, 以及参数变化对解的影响; 全局分析主要关注各个吸引子及其吸引域的空间位置, 不稳定不变集, 以及参数变化对相空间全局结构的影响. 由于全局分析能够使人们获得非线性系统的更多信息, 因此对系统进行全局分析是一项非常重要的工作.

非线性系统的全局分析方法可以分为解析方法和数值方法. 解析方法中较为著名的是 Melnikov 方法^[1,4], 该方法通过度量系统稳定流形与不稳定流形之间的距离, 并经过一阶近似简化后成为 Melnikov 函数, 然后判断它是否存在简单零点, 如果存在则表明系统的稳定流形和不稳定流形横截相交而形成 Smale 马蹄^[5], 从而导致混沌的出现. 由于适用于该方法的系统需要满足一定的条件, 如未受扰动的平面可积系统存在双曲鞍

点和连接鞍点的同宿轨道或异宿环, 因此, 它只适用于部分非线性系统. 此外, 文献 [6] 在无穷远奇点一节对于全局结构进行了精辟的论述. 由于非线性问题的“个性”很强, 目前尚没有统一的求解方法, 因此在对系统进行全局分析的研究工作中, 数值方法一直占有重要的地位, 它是人们进行全局分析的有效选择, 也是工程和科学领域许多学者研究的主题.

利用数值方法研究动力系统的全局特性, 人们首先想到的是直接数值模拟法^[7], 例如, 若要确定相空间中系统的吸引子, 可以从某一初始点出发数值积分, 当充分长时间后系统的最终运动行为就确定了吸引子的位置, 而所有可以到达该吸引子的初始点的集合就构成了该吸引子的吸引域. 尽管这种方法直观明了, 然而实施时却要耗费很长的时间, 特别是当系统存在多个吸引子及其吸引域时, 为了不漏掉每个吸引子, 需要在相空间内选取大量的初始点, 当每个初始点出发的轨线演化充分长时间后再来确定吸引子的位置和个数, 然后对所有初始点进行分类确定出吸引域. 显然,

收稿日期: 2012-02-28, 修回日期: 2012-11-25

*国家自然科学基金资助项目 (11172233, 10932009)

† E-mail: weixu@nwpu.edu.cn

通过直接数值模拟法对系统进行全局分析需要更长的时间,常常使人们无法忍受.因此,设计一些高效的数值方法对系统进行全局分析是十分必要的.胞映射方法就是基于上述目的而产生的一种有效的全局分析方法.

2 胞映射方法的理论研究及进展

胞映射方法最先由 Hsu^[8] 在 20 世纪 80 年代初提出.方法一经出现,便以其快速、准确和适用范围广等特点而被众多研究者所关注,成为研究的热点.它的基本思想^[9-11]是将动力系统状态空间离散化为许多小的几何体(胞),全部胞构成的集合形成胞空间.将动力系统状态空间转化为胞空间后,动力系统中状态的转移就自然地对应成为胞之间的转移.进而通过对胞之间转移关系的研究完成对原动力系统的相应研究.这就是胞映射方法的基本思想.

相对于直接数值模拟法,胞映射方法以胞作为研究单元,根据动力系统的转移关系形成胞之间的转移关系(胞映射动力系统).对胞映射动力系统进行研究后,得到胞空间的分类.进而对分类结果进行动力学解释,完成对动力系统的相关研究.胞映射方法不是孤立地研究动力系统中每条轨线的演化,而是从整体上关注各状态胞之间的信息传递,避免了直接数值模拟法简单孤立地对待所处理的信息,从而极大地提高了效率.此外,通过对状态胞之间转移信息的深入分析,可以获得直接数值模拟法较难得到的某些动力学行为(如图胞映射方法分析中得到的不稳定不变集或鞍^[12-13]).而且,基于胞的概念,还可以对直接数值模拟法进行改进,得到更为高效的点映射方法^[14-16].

事实上,先于 Hsu 提出胞映射方法,已有类似方法在相应的文献中出现过,正如《非线性动力学系统的数值研究》^[17]一书中所指出的:“将状态空间(或称相空间)离散化的思想,在 Kolmogorov (1959) 和 Sinai (1959) 的著作中就可以找到.他们把状态空间加以分割,以便克服确定测度熵时遇到的困难.

与先前研究者不同, Hsu 是首先全面地、系统地研究胞映射方法,并将其应用于各种确定性、随机非线性动力系统的动力学行为与控制研究中的学者.随后,受此启发,各国学者基于胞映射的思想发展出各种胞映射方法,发表了大量相关论文,并在科学与工程实际领域取得了丰富的成果.

2.1 简单胞映射

简单胞映射 (SCM)^[8] 方法是由 Hsu 在 1980 年首次提出的.该方法的基本思想是将连续状态空间离散化为许多小的几何体(胞),状态空间离散化为大量胞的集合,胞的集合构成胞状态空间并且被整序数所标识.对每一个胞的中心点进行短时积分(映射),则可以建立该胞与积分结果所达之胞的映射关系,从而就构造出一个基于胞空间上的映射,即胞映射动力系统.对简单胞映射动力系统进行分析,可求得运动方程的周期解及稳态解及其吸引域.事实上,前面提到的直接数值模拟法也可以看作为某种程度的简单胞映射,因为对于实际中的一个点来说,由于有限截断和噪声等因素的影响,计算机无法将该点精确地表示出来,而计算机表示出来的只是该点邻域内某一点的位置信息(该邻域半径非常小).

简单胞映射方法实际上是从状态空间和映射方式上对原动力系统进行了简化.它最大的优点是含义简单明了,易于程序化,运行速度快,至今仍为许多从事实际研究工作的研究人员所喜爱.它的缺点在于由于每一个胞只有一个像胞与之对应,损失的原系统信息过多,故只能得到原系统动力学行为的一个近似描述(如对应于原系统的混沌运动,简单胞映射动力系统只能用有限周期的周期胞群来表征),有时甚至产生“伪解”.为了克服这一缺陷,需要采用较小尺寸的胞,合理选取映射点,更为重要的是需要使用者具有一定的经验.

2.2 广义胞映射方法

对于简单胞映射方法,一个胞中只有一个代表点,由于计算机处理能力的有限性,胞总是具有一定的几何体积(特别是受限于 80 年代的计算机处理能力,当时采用的胞结构较粗糙),仅用一个内点信息来近似动力系统,在一些情况下可能会产生很大的误差(如系统的吸引域边界具有分形结构时).为了更准确地反映动力系统的真实信息,自然的想法是在每个胞中选取更多的代表点,广义胞映射方法 (GCM)^[18] 就是这一想法的直接体现,它由 Hsu 在 1981 年提出.广义胞映射方法延续了简单胞映射方法将状态空间离散为胞空间的思想,但在建立胞与胞之间映射关系的过程中采用一个胞可以发出多条轨线,一个胞可以有多个像胞的方法;而在分析过程中,将广义胞映射动力系统等价于一个 Markov 链,采用 Markov 链的分析方法对广义胞映射动力系统进行分析.

相比于简单胞映射方法, 广义胞映射方法的这种改变优点在于: 它不仅保留了原动力系统的更多信息, 而且更能从统计意义上反映动力系统流流的观点, 其研究领域自然延伸到随机动力系统. 广义胞映射方法不仅适用于研究系统的拓扑结构等定性性质, 如计算系统的吸引子和吸引域、确定各吸引子的吸引域边界, 还适用于从统计角度分析系统的定量性质, 如吸引子的极限概率分布、奇怪吸引子的空间概率特征、熵演化的不变分布以及李雅普诺夫指数等, 这些工作在 Hsu 的专著^[9]中都有详细介绍. 1992 年 Hsu 进一步推广了广义胞映射分析方法^[10], 发现了瞬态过程中有着规律性层次结构, 并将这些结构反映于 Markov 链的转移概率矩阵, 构造了瞬态胞转移概率矩阵内结构的驻址基范式 (domicile-based normal form); 这一发现使得广义胞映射方法不仅可以刻画系统最终的动力学行为, 同时也能够揭示系统瞬态过程的演化信息, 适合控制与优化控制等研究领域.

与简单胞映射方法相比, 广义胞映射方法对于动力系统的描述有了本质的改进. 通过对广义胞映射动力系统的研究, 得到原动力系统的信息也就更多、更为深入. 此外, 该方法还是研究随机动力系统的天然工具, 而简单胞映射方法不具备此性质. 但其不足也十分明显, 首先是其算法复杂, 要求使用者具有纯熟的编程技巧, 以便当胞的数目巨大时 (通常均在百万级别), 计算时间不会太长^[19]. 另外, 由于广义胞映射方法依然以胞之间的转移来表征动力系统中状态的转移, 而一个胞又存在多个像胞, 故可能形成胞流的扩张, 即使对于较小尺寸的胞, 也无法从根本上消除这种现象. 胞流的扩张使得广义胞映射方法的准确性降低了, 影响了其使用^[17]. 广义胞映射方法既有理论上的优势, 又有实际处理过程中技术上的困难. Levitas^[20]对于这种情况作出了分析和评价: 认为广义胞映射方法既有理论上的优势, 又有实际处理过程中技术上的困难.

2.3 图胞映射方法

1995 年, Hsu 在以前分析方法的基础上, 将偏序集和图论理论与广义胞映射方法相结合, 提出了广义胞映射与偏序集 (poset) 和图论数学分支的对应^[11] (以下简称图胞映射方法). 对于胞映射动力系统, 将每个胞对应于有向图的一个顶点, 如果两个胞之间存在一步可达关系, 则相应顶点之间存在一条有向边, 如果有必要还可进一步定义该

有向边上的权为胞之间的转移概率. 从而胞映射动力系统就完全等价于一个有向图, 对胞映射动力系统的分析就变为对一个有向图的分析. 在对有向图进行分析时, 可以得到图的强连通子图, 强连通子图是指有向图顶点集的一个子集合, 该子集合中的任何两个顶点相互可达. 强连通子图对应的是相应动力系统的稳定和不变集, 不稳定不变集 (鞍) 是其他方法不易得到的. 当有向图的某一顶点不属于强连通子图时, 则其对应的胞称为瞬态胞. 如果一个瞬态胞可达某一闭强连通子图, 则称这个闭强连通子图为该瞬态胞的一个驻足, 一个瞬态胞可以有多个驻足, 按照瞬态胞所具有的驻足数目, 瞬态胞被分为单驻足瞬态胞和多驻足瞬态胞, 仅具有一个驻足的瞬态胞称为单驻足瞬态胞, 具有多于一个驻足的瞬态胞称为多驻足瞬态胞, 单驻足瞬态胞对应于吸引子的吸引域, 多驻足瞬态胞对应于吸引域的边界.

1999 年, 徐健学等^[21]依循 Hsu 的思路, 通过在胞状态空间上定义二元关系, 建立广义胞映射动力系统与图的对应关系并给出了严格的数学证明, 提出了全局分析的广义胞映射图论方法, 将其应用于激变问题的研究中^[12-13,22]. 2006 年, Hong 等^[23]将上述方法推广到模糊动力系统问题的研究之中, 取得了很好的研究成果^[24-25].

2.4 图胞映射的符号分析方法和面向集合方法

Hsu^[11]的工作将图论中的相关概念和优秀算法与胞映射方法相结合, 得到各种与动力系统不稳定极限集 (鞍点, 混沌鞍等) 相关的信息, 是以前的胞映射方法所不具备的. 方法极具启示性, 对其后胞映射研究有重要的影响. 正是由于有了这些工作, 近年来相继出现了一些与图胞映射方法类似的方法, 主要是 Osipenko 提出的符号分析方法^[26-31] (symbolic analysis) 和 Dellnitz 等人提出的面向集合方法^[32-47] (set-oriented methods). 这些方法在科学与工程领域取得了显著的研究成果.

对于符号分析方法, Osipenko 将动力系统通过有限覆盖和映射关系将其转化为有向图, 该有向图被称为所研究系统的符号映像. 认真分析研究该有向图的生成过程后可以看出它与图胞映射方法中有向图的生成过程完全相同. 在原动力系统转化为有向图之后, 可以利用图的算法对原系统动力学性质进行揭示. Osipenko 的研究表明, 在

原系统和它的符号映像之间存在如下关系: 系统的轨道对应于图中的容许路径; 符号映像反映了动力系统的全局结构; 符号映像可视为系统的一个有限逼近; 胞的最大直径控制了逼近的精度. 在其专著中 Osipenko [26] 对符号分析法有相当深入的论证.

面向集合法是另一种类似于图胞映射的方法. 该方法首先将要研究的区域分成许多小区域 (被称为“集合”), 根据动力系统的轨线转移信息确定小区域之间的相互关系, 然后将动力系统不变集、不变流形、不变测度等特性反映于这些小区域上, 为了得到某一特性 (如全局吸引子) 精细结果, 运用有向图的强连通子图的概念, 不断选择包含这一特性的合适区域, 将其多级细分 (multi-level subdivision procedures), 而其他区域则在考虑之外, 全部抛弃. 从以上的分析介绍可知, 这两类方法和图胞映射方法有着紧密的联系:

(1) 符号分析方法和面向集合法都是通过对状态空间离散然后运用图论方法来分析动力系统, 这是与 Hsu 的图胞映射方法相似的地方.

(2) 对于相同的动力系统, 它们所处理的有向图与图胞映射方法中的有向图是完全一样的.

(3) 为了克服有向图分析处理所面临的困难, 这两种方法均是通过舍弃一部分信息来换取上述问题的部分解决, 针对分析的目的不同, 其舍弃的信息也不同: 符号分析方法更为关注系统的周期解 (稳定和不稳定); 面向集合方法更为关注系统的不变集; 而图胞映射方法则通过研究状态胞之间的演化来寻求动力系统的多种全局信息. 由于符号分析方法和面向集合法均舍弃了部分信息, 使得对有向图的分析处理较已有的图胞映射方法 [11,21] 更为深入; 也正是由于他们舍弃了部分信息, 使得他们的分析还不够全面. Dellnitz 等 [32] 在谈到面向集合法时对此有过详细的分析与论述.

由于上述不同, 图胞映射方法在对胞映射动力系统信息发掘及算法研究上要远远难于上述两种方法. 但反映信息更多、也更为深刻; 同时它能很好地与其他方法相结合, 揭示动力系统信息. 贺群等 [48] 延续了 Hsu 和洪灵, 徐健学的思路, 提出了基于自循环胞集的瞬态胞分类方法, 实现了动力系统稳定流形和不稳定流形的胞映射逼近. 进一步, 文献 [49-54] 将迭代分割技术与图胞映射方法相结合, 提高了它的效率, 构建了迭代图胞映射方法. 并给出了一类典型非线性随机系统的全局分析, 研究了几类随机激励下非线性系统的

全局分岔和混沌行为.

2.5 其他一些胞映射方法

此外, 国内外许多学者从各个方面对胞映射方法进行了研究和改进. 这些工作各具特色, 使其功能更强、效率更高、适用范围更广. 研究工作主要集中在两个方面: 高效、准确地确定各胞之间转移关系; 更为合理地确定胞空间结构. 其中具有代表性的方法有:

2.5.1 胞映射方法-邻接胞映射方法

1993 年, Zufira 等 [55-56] 提出了一种有趣的胞映射方法: 邻接胞映射方法. 该方法针对的是自治微分方程系统. 在采用通常的胞空间结构的基础上, 根据自治系统中轨线的性质, 通过合理选取积分时间, 在建立胞与胞之间转移关系时, 将像胞限制在与原胞几何位置相邻接的胞中. 这不仅解决了自治微分方程在胞映射方法运用中积分时间的选取问题, 更为重要的是在其后的算法中, 该胞映射方法提供了一种可能性, 即先对若干个局部区域进行分析, 然后再将这些分析结果进行“无缝”连接, 在大大降低难度和复杂度的情况下, 能够准确地得到动力系统的全局性质. 在广义胞映射和图胞映射方法已经实现了确定性动力系统和随机动力系统统一处理模式的情况下, 该方法提供的动力系统全局和局部处理的有机融合前景就显得更为诱人. 但是, 由于该方法建立胞转移时只和相邻的胞发生关系, 故该方法产生的胞流扩张也最为明显, 造成进一步研究的困难.

使用广义胞映射方法处理随机非线性动力系统时一个巨大的困难是转移概率矩阵的形成通常需要大量的计算时间. 针对这一问题, Sun 等 [57] 通过随机动力系统求得其满足的矩方程, 认为动力系统的短时转移概率密度可以使用高斯概率密度函数近似表示, 故可以通过数值方法求解矩方程, 得到转移概率密度的解析表达式, 大大节省了由随机动力系统生成胞映射动力系统的时间. 该方法是首次通过获得动力系统在较小邻域内状态转移的解析表达式去生成胞映射动力系统, 极大地提高了胞映射方法的效率, 研究思路极具启发性.

2.5.2 庞加莱型的简单胞映射法

Levitas 等 [58-59] 提出了庞加莱型的简单胞映射法. 这种方法针对的是自治微分方程系统. 在胞空间的生成过程中, 与其他胞映射方法不同, 它

不是在动力系统状态空间中形成胞空间,而是在状态空间的若干个截面中形成胞空间,并在此空间中运用简单胞映射方法对原动力系统进行研究.该方法的优点在于:在对同一动力系统进行研究时,由于该方法中胞空间对应的状态空间比其他方法中胞空间对应的维数少 1,因此胞空间中胞的数目极大减少,胞映射动力系统处理过程所需时间也极大减少.但该方法也有其不足:首先,由于在形成胞空间时需要选取截面,因此,被选取截面是否恰当是该方法成功与否的关键,由于非线性问题具有强烈的“个性”,因此对截面选取无法提供统一处理方案;其次,该方法的胞映射动力系统是建立在真实动力系统的截面上,为了将胞映射动力系统得到的结果进行动力学解释,就需要在胞空间对应的状态空间高 1 维的空间进行工作,直观性大为降低,难度加大,也给将该方法推广到广义胞映射甚至于图胞映射方法的研究中带来了极大的困难.但无论怎样,该方法中通过合理选取最好的胞空间结构来提高胞映射计算效率的这一观点对其后的研究工作启示巨大.

胞映射方法研究中一个引人入胜的方面是它的迭代分割方法与算法的研究.研究发现在借助胞映射方法研究非线性系统的动力学特性时,通常会遇到这样两个问题:其一是尽量想使胞的尺寸足够小,从而能够准确地展示系统的全局空间结构,其二是提高计算速度.然而这两者之间存在着矛盾,因为胞的尺寸足够小就意味着胞的数目的增多,胞的数目增多将导致计算速度降低.为了解决这一困难,许多学者基于相应版本的胞映射方法提出了细化处理方案,如 Hsu 等^[60]利用兼容的胞映射方法研究了吸引子和边界的细化问题,Zhu 等^[61]基于广义胞映射方法给出了奇怪吸引子的细化方案,Jiang 等^[62-63]基于迭代的胞参照点映射法提出了用于优化胞结构的多尺度参照技术.Guder 等^[64]结合广义胞映射方法提出迭代细化方案,并提出了生成映射时的自动中止条件.这些细化处理方案与相应版本胞映射方法的有机结合,极大地提高了计算效率.将各种胞映射方法与细化技术相结合是胞映射方法应用于动力系统研究的一个重点,同时也是一个难点.

2.5.3 插值胞映射法

上述方法均是以胞的转移来替代动力系统中状态的转移.由于存在轨线的不连续性,一旦采用的胞尺寸较大,就会造成相当大的误差,有时甚至产生伪解.Tongue 等^[14,65-70]提出了插值胞映射法

(ICM)克服上述不足.该方法继承了简单胞映射方法中对动力系统状态空间进行离散化的处理方法;与之不同的是:对于动力系统,它不是建立胞之间的转移关系,而是通过数值积分直接得到每个胞的各个顶点的像点,而对于胞中任何一个点,通过该胞各个顶点的像点的插值(最初是双线性插值,随后又发展为各种插值方法)得到该点的像点,在此基础上使用传统的点映射方法对动力系统进行研究.该方法减少了胞轨道中像点到胞中心点不连续所造成的误差和失真,获得了一批较好结果.本质上插值胞映射方法与上述胞映射方法是完全不同的.胞在其中的作用只是为了快速生成动力系统中状态点的转移.该方法的突出优点在于计算速度快.但也存在一些不足:它的插值通常为线性插值,精度受到影响.

2.5.4 胞参照点映射法

为了改进插值胞映射方法的上述不足,1994年 Jiang 等提出了胞参照点映射法(PMU-CR)^[16,62-63].该方法将动力系统状态空间离散化后,胞结构在动力系统研究中的作用是真实轨线的另一个记录坐标.这样动力系统的状态既有真实坐标又有胞坐标.它的好处在于它对动力系统进行研究的方法是点映射方法(没有经过插值),准确性得到很好地保证;又由于胞结构的存在,使得对一条动力系统连续轨线探查所使用的时间大大缩短.此外,国内一些学者如文成秀等提出的胞映射点映射法^[66]是用传统的胞映射方法对动力系统进行研究,然后再使用点映射方法对胞映射方法的结果进行检验和修正.这两种方法最为突出特点是:他们强调了胞空间和胞映射结果的灵活使用,强调胞映射方法同其他方法的有机结合、相互融合,为胞映射方法的进一步发展开辟了新方向.

3 胞映射方法在控制及相关领域的应用研究及进展

最优控制理论及其各种应用已经成为工程领域中重要的研究课题.胞映射方法最初是由 Hsu 提出并应用于最优控制问题^[71-72],随后关于控制方面的其他应用也相继展开. Burns 等^[73]基于胞映射方法发展了航天器动量卸压控制算法,将基于胞映射方法的最优控制技术应用于动量卸压问题的研究,得到了大量基于磁力矩器的卸压方案.Zhu 和 Leu^[74]利用胞映射方法设计机器臂的全局

轨线, 并研究了在无约束领域和有障碍约束领域下的最优轨线问题. Wang 和 Lever^[75] 利用胞映射方法研究了多机器人手臂的一般最优轨线的设计问题, 并构造了寻找最优轨线的简单搜寻算法, 该算法特点是通过简单的搜索从所有可能的初始条件出发, 均能产生最优轨线. Yen 等^[76] 利用胞映射方法基于 bang-bang 控制理论, 研究了计算机硬盘读写磁头的跟踪控制问题.

Sun 和其合作者在胞映射应用于最优控制问题研究上获得了一系列成果. 他们^[77-78] 利用简单胞映射方法提出一种策略来解决固定末端最优控制问题, 利用不统一时间步长的简单胞映射方法创建一般数据库, 同时提出两级后向搜索算法以获得不同最优控制问题的解. 在文献^[79] 中, 基于贝尔曼的最佳性原理他们又提出一种胞映射策略, 解决了状态和控制有界的强非线性系统固定末端最优控制问题. 进一步, 他们^[80-81] 将基于短时高斯逼近的广义胞映射方法应用于随机动力系统的随机最优控制问题研究. 该方法仍采用贝尔曼的最佳性原理, 获得对所有初值问题来说的最优控制问题的全局解. 此外, 他们^[82] 还利用简单胞映射方法研究了两种对立物种数量的最优控制问题, 提出两种控制策略, 并通过调控耦合系数以实现维持两种物种长期共存.

胞映射方法在模糊控制设计方面也有广泛的应用研究. Chen 等^[83] 首先将简单胞映射方法应用在模糊控制设计问题上, 利用胞与胞映射的概念获得模糊动力系统状态的演化过程. Yen 等^[84] 提出模糊胞映射方法来研究次优控制律, 该方法不仅保留了胞映射方法简单灵活的特性, 还能够降低对胞数目的要求, 此外还能消除由不精确的状态描述引起的稳态误差累积问题. 对高维状态空间中的模糊最优控制问题, Smith 和其合作者将简单胞映射进行扩展并得到一些研究成果^[85-89]. 除了简单胞映射之外, 广义胞映射方法也被扩展并应用于模糊动力系统的研究中. Edwards 等^[90] 将模糊逻辑和胞映射方法相结合研究了一类混沌系统的全局特性, 他们提出将每个具有相同形式胞的初始分布作为非典型的模糊从属函数, 这样的广义胞映射仍然是一个 Markov 链. 此外, Sun 等^[91] 还利用 Zadeh 扩展准则对广义胞映射方法进行改进, 提出基于模糊集的胞映射方法来研究模糊不确定非线性动力系统.

为了提高计算精度和降低计算量, 并用以分析非线性动力系统的控制设计和分析, 一些学者

对胞映射方法本身进行了扩展研究. Sun 等^[57] 提出短时高斯逼近方法, 并将该方法应用于广义胞映射方法一步转移概率矩阵的计算当中, 事实证明该方法精确且有效. 此外, 基于短时高斯逼近的胞映射方法还可以用于分析非线性动力系统的瞬态和稳态解, 并可以应用于随机动力系统的随机最优控制问题的研究中. Baglio 等^[92] 提出一种高效的立方体收集算法用于解决胞映射方法的内存问题, 该方法能够使用较少的计算机内存精确分析高维系统的动力学行为. Zufria 等^[93] 基于自适应时间积分法提出一种邻接胞映射方法, 该方法能够克服简单胞映射方法积分时间间隔问题, 同时作者又提出一种基于自适应时间积分的递归算法, 研究表明改进后的简单胞映射在确定动力系统周期解方面比较有效.

4 胞映射方法的研究展望

胞映射算法的基本思想是将动力系统的连续状态空间离散化为胞状态空间, 用胞来代替状态空间中的点, 每个胞可以对应一个或者多个像胞, 用状态胞与其像胞之间的转移关系来对应原系统中状态点之间的关系, 从而得到原动力系统的全局特性. 为了使全局特性刻画地更加清晰, 就需要对胞状态空间进行更精细的划分, 这样的代价就是使胞状态空间中的状态胞数目增多, 从而将导致算法需要更大的计算机存储空间. 特别地, 当考虑非线性随机动力系统时, 更是如此. 为了达到更准确的结果, 对每个采样点需进行多次的随机取样, 这无疑又大大增加了计算机的存储空间和计算时间. 在胞映射算法中, 求状态胞与其像胞之间对应关系的过程, 实际上是在求一步转移概率矩阵, 这一步是胞映射算法的关键也是核心步骤, 也是绝大部分机时所耗费的关键. 胞映射算法要发展得更为广泛, 特别要应用于高维非线性随机动力系统中, 就需要有新的方法和思路. 因此, 深入研究胞映射算法的快速有效实现, 对非线性随机动力系统全局分析的研究具有重要的意义. 进一步的工作可在以下几方面展开:

对胞映射方法发展有效的计算算法, 以使其更加有效地用于高维动力系统的研究, 可以从合理利用计算机内存和提高计算效率两方面出发. 一是稀疏矩阵方法, 该方法虽然在文献^[94] 中提到过, 但是尚未进行扩展研究, 它可以通过有效的矩阵算法解决胞映射计算的存储问题. 二是短时

高斯逼近方法, 基于短时高斯逼近的胞映射算法可以提高转移概率矩阵的计算速度, 这使得其可以用于随机最优控制等问题的研究.

随着计算机技术的发展, 可将并行技术和算法引进到胞映射方法; 将迭代图胞映射与已有的其他数值方法相结合, 使之互为基础, 互为补充是一个非常有趣的问题, 解决得好往往可以起到事半功倍的作用; 合理使用迭代图胞映射方法中“胞”的概念可能是解决高维动力系统胞映射分析的捷径; 合理使用迭代图胞映射方法分析结果中有向图的压缩表示是实现胞映射方法“局部分析”和“全局分析”的有效途径, 该方法可能是彻底解决高维动力系统胞映射分析的途径; 由于迭代图胞映射方法是对各种动力系统进行全面分析的有利工具, 因此可以将其应用于多种具体的确定性和随机动力系统全局分析研究及控制中, 发现新现象, 解决新问题.

胞映射方法的数学基础研究一直是胞映射方法研究的难点, 从伪轨道和系统不变测度两个方向展开工作是现阶段该工作两大研究方向. 该问题的复杂性致使它的彻底解决是一个长期、艰巨的工作, 需要进一步研究.

参考文献

- Guckenheimer J, Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer-Verlag, 1983
- Ott E. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993
- Moon F C. *Chaotic and Fractal Dynamics*. New York: John Wiley & Sons, 1992
- Wiggins S. *Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods*. Beijing: Springer-Verlag, 1990
- Smale S. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1957, 73: 747-753
- 张芷芬. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 1985
- Parker T S, Chua L O. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. New York: Springer-Verlag, 1989
- Hsu C S. A theory of cell-to-cell mapping dynamical systems. *J. Applied Mechanics*, 1980, 147: 931-939
- Hsu C S. *Cell-to-Cell Mapping: A Method of Global Analysis for Nonlinear Systems*. New York: Springer-Verlag, 1987
- Hsu C S. Global analysis by cell mapping. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1992, 2(4): 727-771
- Hsu C S. Global analysis of dynamical systems using posets and digraphs. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1995, 5: 1085-1118
- Hong L, Xu J X. Crises and chaotic transients studied by the generalized cell mapping digraph method. *Phys. Lett. A*, 1999, 262: 361-375
- Hong L, Xu J X. Discontinuous bifurcations of chaotic attractors in forced oscillators by generalized cell mapping digraph (GCMD) method. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2001, 11: 723-736
- Tongue B H, Gu K Q. Interpolated cell mapping of dynamical systems. *J. Applied Mechanics*, 1988, 55: 461-466
- Golat M, Flashner H. A new methodology for the analysis of periodic systems. *Nonlinear Dynamics*, 2002, 28: 29-51
- Jiang J, Xu J X. A method of point mapping under cell reference for global analysis of nonlinear dynamical systems. *Phys. Lett. A*, 1994, 188: 137-145
- 凌复华. 非线性动力学系统的数值研究. 上海: 上海交通大学出版社, 1989
- Hsu C S. A generalized theory of cell-to-cell mapping for nonlinear dynamical systems. *J. Applied Mechanics*, 1981, 48: 634-642
- Bestle D, Kreuzer E. Modification and extension of an algorithm for generalized cell mapping. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1986, 59: 1-9
- Levitas J. Global stability analysis of fuzzy controllers using cell mapping methods. *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, 106: 85-97
- 徐健学, 洪灵. 全局分析的广义胞映射图论方法. *力学学报*, 1999, 31(6): 724-730
- 洪灵, 徐健学. 两参量平面上双重激变尖点研究. *物理学报*, 2002, 51(12): 2694-2701
- Hong L, Sun J Q. Bifurcations of fuzzy nonlinear dynamical systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2006, 11: 1-12
- Hong L, Sun J Q. Bifurcations of forced oscillators with fuzzy uncertainties by the generalized cell mapping method. *Chaos Solitons & Fractals*, 2006, 27: 895-904
- Hong L, Sun J Q. Codimension two bifurcations of nonlinear systems driven by fuzzy noise. *Physica D*, 2006, 213: 181-189
- Osipenko G. *Dynamical Systems, Graphs, and Algorithms*. Berlin: Springer-Verlag 2007
- Osipenko G, Ayter S, Kobayakov S. The structure matrix of dynamical system: Tools for mathematical modeling. *Mathematical Research*, 2001, 8: 06-114
- Osipenko G, Pehlivan S. Verification of structural stability, tools for mathematical modeling. *Mathematical Research*, 2001, 8: 115-126
- Osipenko G. Calculation of Lyapunov exponents by applied symbolic dynamics. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2001, 2(1): 53-72
- Osipenko G. Spectrum of a dynamical system and applied symbolic dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2000, 252: 587-616
- Osipenko G, Campbell S. Applied symbolic dynamics: Attractors and filtrations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 1999, 5(1-2): 43-60
- Dellnitz M, Hohmann A. A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors. *Numerische Mathematik*, 1997, 75: 293-317
- Dellnitz M, Junge O. In: *Handbook of Dynamical Systems II: Towards Applications*. Singapore: World Scientific, 2002. 221-264
- Dellnitz M, Froyland G, Junge O. *Ergodic Theory, Analysis, and Efficient Simulation of Dynamical Systems*. Berlin: Springer, 2001. 145-174,
- Dellnitz M, Junge O. An adaptive subdivision technique for the approximation of attractors and invariant measures. *Comput. Visual. Sci.*, 1998, 1: 63-68
- Dellnitz M, Junge O. Almost invariant sets in Chua's circuit. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1997, 7(11): 2475-2485
- Mehra P G, Hessel-von Molo M, Dellnitz M. Symmetry of attractors and the Perron-Frobenius operator. *Journal*

- of *Difference Equations and Applications*, 2006, 12(11): 1147-1178
- 38 Sertl S, Dellnitz M. Global optimization using a dynamical systems approach. *Journal of Global Optimization*, 2006, 34(4): 569-587
- 39 Dellnitz M, Junge O, Koon WS, et al. Transport in dynamical astronomy and multibody problems. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2005, 15(3): 699-727
- 40 Dellnitz M, Schütze O, Hestermeyer T. Covering pareto sets by multilevel subdivision techniques. *Journal of Optimization, Theory and Applications*, 2005, 124(1): 113-136
- 41 Day S, Junge O, Mischaikow K. A Rigorous numerical method for the global analysis of infinite dimensional discrete dynamical systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2004, 3(2): 117-160
- 42 Junge O, Osinga H. A set oriented approach to global optimal control. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2004, 3(2): 259-270
- 43 Froyland G, Dellnitz M. Detecting and locating near-optimal almost invariant sets and cycles. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2003, 24(6): 1839-1863
- 44 Dellnitz M, Schutze O, Sertl S. Finding zeros by multilevel subdivision techniques. *Journal of Numerical Analysis*, 2002, 22(2): 167-185
- 45 Dellnitz M, Junge O, Thiere B. The numerical detection of connecting orbits. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 2001, 1(1): 125-135
- 46 Froyland G, Junge O, Ochs G. Rigorous computation of topological entropy with respect to a finite partition. *Physica D*, 2001, 154: 68-84
- 47 Junge O. An adaptive subdivision technique for the approximation of attractors and invariant measures: Proof of convergence. *Dynamical Systems*, 2001, 16(3): 213-222
- 48 贺群, 徐伟, 李爽, 等. 图胞映射的一种改进方法. *物理学报*, 2008, 57(2): 743-748
- 49 贺群, 徐伟, 李爽, 等. 基于复合胞化空间的图胞映射方法. *物理学报*, 2008, 57(7): 4021-4028
- 50 Yue X L, Xu W. Stochastic bifurcation of an asymmetric single-well potential Duffing oscillator under bounded noise excitation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2010, 20(10): 3359-3371
- 51 Xu W, Yue X L. Global analyses of crisis and stochastic bifurcation in the hardening Helmholtz-Duffing oscillator. *Science China Technological Sciences*, 2010, 53(3): 664-673
- 52 He Q, Xu W, Rong H W, et al. Stochastic bifurcation in duffing-van der pol oscillators. *Physica A*, 2004, 338: 319-334
- 53 Xu W, He Q, Fang T, et al. Stochastic bifurcation in Duffing system subject to harmonic excitation and in presence of random noise. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2004, 39: 1473-1479
- 54 Xu W, He Q, Fang T, et al. Global analysis of stochastic bifurcation in Duffing system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2003, 13: 3115-3123
- 55 Zufiria P J, Guttalu R S. The adjoining cell mapping and its recursive unraveling, part one: description of adaptive and recursive algorithms. *Nonlinear Dynamics*, 1993, 4: 207-226
- 56 Zufiria P J, Guttalu R S. The adjoining cell mapping and its recursive unraveling, part two: Application to selected problems. *Nonlinear Dynamics*, 1993, 4: 309-336
- 57 Sun J Q, Hsu C S. The generalized cell mapping method in nonlinear random vibration based upon short-time Gaussian approximation. *J. Applied Mechanics*, 1990, 57: 1018-1025
- 58 Levitas J, Weller T, Singer J. Poincare-like simple cell mapping for nonlinear dynamical systems. *J. Sound and Vibration*, 1994, 176: 641-662
- 59 Levitas J, Weller T. Poincare linear interpolated cell mapping: method for global analysis of oscillating systems. *J. Applied Mechanics*, 1995, 62: 489-495
- 60 Hsu C S, Chiu H M. Global analysis of a system with multiple responses including a strange attractor. *J. Sound and Vibration*, 1987, 114: 203-218
- 61 Zhu W H, Wu Q T. New methods of determining the strange attractor by generalized cell mapping approach. *Commun. Appl. Numer. Methods*, 1988, 4: 543-548
- 62 Jiang J, Xu J X. An iterative method of point mapping under cell reference for the global analysis of nonlinear dynamical systems. *J. Sound and Vibration*, 1996, 194: 605-621
- 63 Jiang J, Xu J X. An iterative method of point mapping under cell reference for the global analysis: Theory and a multiscale reference technique. *Nonlinear Dynamics*, 1998, 15: 103-114
- 64 Guder R, Dellnitz M, Kreuzer E. An adaptive method for the approximation of the generalized cell mapping. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1997, 8(4): 525-534
- 65 Tongue B H, Gu K Q. A higher order method of mapping. *J. Sound and Vibration*, 1988, 125: 169-179
- 66 文成秀, 姚玉玺, 闻邦椿. 动力系统的点映射 - 胞映射综合法. *振动工程学报*, 1997, 10(4): 413-419
- 67 Tongue B H, Gu K Q. A theoretic basis for interpolated cell mapping. *SIAM J. Applied Mathematics*, 1988, A8: 1206-1212
- 68 Tongue B H. On obtaining global nonlinear system characteristics through interpolated cell mapping. *Physica D*, 1987, 28: 401-408
- 69 Tongue B H, Gu K Q. A higher order method of interpolated cell mapping. *J. Sound and Vibration*, 1988, 125: 169-179
- 70 Whitf M T, Tongue R H. Application of interpolated cell mapping to analysis of the Lorenz equations. *J. Sound and Vibration*, 1995, 188(2): 209-226
- 71 Hsu C S. A discrete method of optimal control based upon the cell state space concept. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1985, 46(4): 547-569
- 72 Bursal F H, Hsu C S. Application of a cell-mapping method to optimal control problems. *International Journal of Control*, 1989, 49: 1505-1522
- 73 Flashner H, Burns T F. Spacecraft momentum unloading: the cell mapping approach. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1990, 13: 89-98
- 74 Zhu W H, Leu M C. Planning optimal robot trajectories by cell mapping. In: *Proceedings of Conference on Robotics and Automation, IEEE, New York, 1990. 1730-1735*
- 75 Wang F Y, Lever P J A. A cell mapping method for general optimum trajectory planning of multiple robotic arms. *Robotics and Autonomous Systems*, 1994, 12: 15-27
- 76 Yen J Y. Computer disk file track accessing controller design based upon cell to cell mapping. In: *Proceedings of the American Control Conference, AACC, 1992*
- 77 Crespo L G, Sun J Q. Solution of fixed final state optimal control problems via simple cell mapping. *Nonlinear Dynamics*, 2000, 23: 391-403
- 78 Crespo L G, Sun J Q. Optimal control of target tracking via simple cell mapping. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2000, 24: 1029-1031

- 79 Crespo L G, Sun J Q. Fixed final time optimal control via simple cell mapping. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 31: 119-131
- 80 Crespo L G, Sun J Q. Stochastic optimal control of nonlinear dynamic systems via bellman's principle and cell mapping. *Automatica*, 2003, 39: 2109-2114
- 81 Crespo L G, Sun J Q. Stochastic optimal control of nonlinear dynamic systems via short-time gaussian approximation and cell mapping. *Nonlinear Dynamics*, 2002, 28: 323-342
- 82 Crespo L G, Sun J Q. Optimal control of populations of competing species. *Nonlinear Dynamics*, 2002, 27: 197-210
- 83 Chen Y Y, Tsao T C. Description of the dynamical behavior of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 1989, 19(4): 745-755
- 84 Yen J Y, Chao W C, Lu S S. Fuzzy cell mapping method for a sub-optimal control implementation. *Control Engineering Practice*, 1994, 2: 247-254.
- 85 Smith S M, Comer D J. Self-tuning of a fuzzy logic controller using a cell state space algorithm. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 1990.
- 86 Smith S M, Corner D J. An algorithm for automated fuzzy logic controller tuning. In: Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems, New York, 1992
- 87 Song F, Smith S M. Cell state space based incremental best estimate directed search algorithm for Takagi-Sugeno type fuzzy logic controller automatic optimization. In: Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Taras, 2000
- 88 Song F, Smith S M, Rizk C G. Fuzzy logic controller design methodology for 4D systems with optimal global performance using enhanced cell state space based best estimate directed search method. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, Tokyo, 1999
- 89 Song F, Smith S M, Rizk C G. Optimized fuzzy logic controller design for 4D systems using cell state space technique with reduced mapping error. In: Proceedings of the IEEE International Fuzzy Systems Conference, South Korea, 1999
- 90 Edwards D, Choi H T. Use of fuzzy logic to calculate the statistical properties of strange attractors in chaotic systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, 88(2): 205-217
- 91 Sun J Q, Hsu C S. Global analysis of nonlinear dynamical systems with fuzzy uncertainties by the cell mapping method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1990, 83: 109-120
- 92 Baglio S, Fortuna L, Presti M L. Cube collect: A new strategy to make efficient the classical cell-to-cell algorithm. In: Proceedings of the American Control Conference, New York, 1995
- 93 Zufiria P J, Guttalu R S. Adjoining cell mapping and its recursive unraveling, Part I: Description of adaptive and recursive algorithms. *Nonlinear Dynamics*, 1993, 3: 207-225
- 94 Sun J Q. Random Vibrations of Nonlinear Systems Based upon the Cell State Space Concept. [Ph.D. Thesis] Berkeley: University of California, 1988

DEVELOPMENT AND STUDY ON CELL MAPPING METHODS*

XU Wei^{1,†} SUN Chunyan¹ SUN Jianqiao^{2,3} HE Qun⁴

¹ Northwestern Polytechnical University, Xian 710072, China

² University of California, Merced, CA95340, USA

³ Tianjin University, Tianjin 300072, China

⁴ Engineering College of Armed Police, Xian 710086, China

Abstract This paper presents briefly the research and development of cell mapping methods. Several main cell mapping methods are summarized, including simple cell mapping, generalized cell mapping, digraph cell mapping, symbolic analysis method of digraph cell mapping, set-oriented method of digraph cell mapping, adjoining cell mapping, Poincare-like simple cell mapping, interpolated cell mapping and point mapping under cell reference. For these methods, basic features and characteristics are analyzed, and both domestic and foreign research developments are outlined. Furthermore, the research developments of cell mapping method for control and related fields are presented. Finally, the paper suggests some research prospects and some directions that may first be broken through in the research field of cell mapping method.

Keywords cell mapping method, global analysis, control and its related field

徐伟, 博士, 西北工业大学教授, 专业方向: 非线性动力学, 专长: 随机动力学.



* The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (11172233, 10932009).

† E-mail: weixu@nwpu.edu.cn



力学进展

ADVANCES IN MECHANICS

(总第 183 期)

第 43 卷第 1 期

2013 年 1 月 25 日

目次

结构和系统的动力学与控制专刊

序	陆启韶 张 伟 (1)
时滞动力系统的稳定性与分岔: 从理论走向应用	王在华 胡海岩 (3)
时滞反馈控制的若干问题	蔡国平 陈龙祥 (21)
时滞车辆跟驰模型及其分岔现象	徐 鉴 徐荣改 (29)
拟哈密顿系统非线性随机最优控制	朱位秋 应祖光 (39)
多自由度非线性随机系统的响应与稳定性	金肖玲 王 永 黄志龙 (56)
高维非线性系统的全局分岔和混沌动力学研究	张 伟 姚明辉 张君华 李双宝 (63)
胞映射方法的研究和进展	徐 伟 孙春燕 孙建桥 贺 群 (91)
非光滑多体系统动力学数值算法的研究进展	王 琪 庄方方 郭易圆 章 杰 房 杰 (101)
机械系统摩擦动力学的一些问题	丁 千 翟红梅 (112)
转子与定子碰摩的非线性动力学研究	江 俊 陈艳华 (132)
生物神经元系统同步转迁动力学问题	王青云 张红慧 (149)
具有刚-柔-液-控耦合的航天器动力学研究进展	岳宝增 宋小娟 (163)
绳系卫星在轨试验及地面物理仿真进展	陈 辉 文 浩 金栋平 胡海岩 (174)

· 封面图片说明 · 广义胞映射方法是研究确定性与随机动力系统的有力工具, 以往的一些改进方法在实际研究中仍存在一些不足, 主要是对动力系统流的全局演化信息反映的还不完整, 如与不稳定解(鞍)相关的不变流形的信息没有在图胞映射动力系统中得到反映. 作者对图胞映射方法进行了改进, 提出了图胞映射动力系统中状态空间的新型分类方法. 该方法通过引入新的概念, 解决了动力系统稳定流形和不稳定流形的图胞映射逼近问题. 详见徐伟、孙春燕、孙建桥、贺群文 p91.