第 42 卷 第 5 期 力 学 进 展 Vol. 42 No. 5
2012 年 9 月 25 日 ADVANCES IN MECHANICS Sep. 25, 2012

结构理论中解的存在性问题述评*

孙博华 †

开普半岛科技大学工学院, 南非开普敦

摘 要 阐明线性弹性力学和线性弹性结构理论中解的存在性的基本概念和研究解的存在性意义, 简述微分方程和弹性力学解的存在性的研究结果, 着重介绍和评价王大钧和胡海昌的关于复杂结构和组合弹性结构理论解的存在性的研究成果, 介绍了他们的结构理论算子正定性定理和能量嵌入算子紧致性定理.

关键词 结构理论, 结构理论算子, 存在性定理, 正定算子, 紧致算子

1 引 言

线性弹性力学和结构理论中解的存在性是固体力学的一个基础性的理论问题 (为简便起见, 后文略去 “线性” 二字). 结构理论包括梁、板、壳结构元件的理论, 以及各种结构元件组合和结构元件与弹性体组合构成的复杂形状, 复杂材料的组合弹性结构的理论.

弹性力学和结构理论中主要有 3 类问题: 给定外力和部分变形之下的平衡; 固有振动; 动力响应. 解有几类层次:

(1) 满足微分方程和边界条件的解, 称为古典解;

(2) 满足变分方程 — 最小位能原理或 Rayleigh 商驻值的解;

(3) 在广义导数意义下满足变分方程的解.

其中 (2) 和 (3) 称为广义解. 不同层次的解的光滑性有很大的不同. $2m$ 阶微分方程的古典解具有 $2m$ 阶导数; 第 (2) 类解具有 m 阶导数, 而第 (3) 类解只具有 m 阶广义导数.

讨论微分方程、弹性力学和结构理论解的存在性是在第 (3) 类解的意义下广义解的存在性. 然后, 根据个别问题的方程系数, 边界形状、边界约束的光滑性可以导出广义解的光滑性. 从而考察它属于什么层次的解.

为什么说解的存在性问题是一个基础性的理论问题呢?

(1) 人们在研究自然对象和工程对象时, 要经物理建模和数学建模, 形成数学表达. 弹性力学和结构理论中的问题多是用微分方程、变分方程或积分方程表达. 如果建模不合理, 可能发生解的不存在或不唯一的情形. 例如, 在 Mindlin 板上设置集中质点或集中支承, 在壳上设置集中质量, 这样的结构模型及其数学方程就不存在解, 因此, 解的存在性对合理建模有指导意义.

(2) 弹性力学和结构理论中除了少数特殊的简单问题可以获得精确解, 多数问题需要求助于近似方法获取近似解. 例如惯用的强有力的近似方法 Ritz 法及其变种有限单元法. 这就需要知道近似方法的收敛性. 幸运的是, 解的存在性和近似方法的收敛性常常是紧密关联的. 合理的物理模型、数学方程常常既保证解的存在唯一性又保证 Ritz 近似法的收敛性.

(3) 如前所述, 解的含义有不同的层次, 研究解的属性及其对物理、数学模型、参数的依赖关系, 具有重要的实用意义.

从固体力学的学科分类和发展看: 有 3 类标志性的 (里程碑性的) 解的存在性问题: 有关微分方程主要是椭圆形方程解的存在性、弹性力学解的存在性和结构理论解的存在性.

早期, 一些简单的方程, 如与一维弹性杆有关的 Liouville’s 方程, 与膜有关的 Poisson 方程等, 解

收稿日期 : 2011-11-18, 修回日期 : 2012-03-06 doi: 10.6052/1000-0992-11-156

* 作者于 1989∼1991 年在清华大学工程力学系跟随张维院士做博士后研究, 出站时胡海昌院士担任作者报告会的专家委员会主席, 特此怀念胡海昌先生

† E-mail: bohua.sun@gmail.com

的存在性，可用初等的方法讨论 [1]. Hilbert 泛函空间理论建立后，被用来极其成功地系统地解决了微分方程解的存在性问题. 主要的代表作之一是 1952 年出版的 C. Г. МИХАЛИН 的专著《二次泛函的极小问题》[2]，此书系统简明地阐述了微分方程解的存在唯一性，Ritz 法等近似法的收敛性问题. 它们成为研究许多物理问题，包括弹性力学和结构理论中解的存在性问题的理论框架.

紧接其后，一些学者利用上述理论框架，解决了在广泛的边界条件下的弹性力学的平衡解，固有振动解及动力响应解的存在性问题 [3−7]. МИХАЛИН 在 1952 年的专著 [2] 中，总结了关于三维弹性体在固定、自由、刚性接触以及它们的混合边条件下，弹性力学的平衡和固有振动解的存在、唯一性的证明. Fichera 的专论*Existence Theorems in Elasticity*, 发表于 1972 年的 Encyclopedia of Physics (Ed. Flügge S) Vol VI, a/2, 1984 年又被收录于 Truesdell C 主编的*Mechanics of Solids, Vol. II* [8]. 在此专论中用 Соболев空间理论对弹性力学的平衡，固有振动和动力响应解做出了更精细的分析. 如此重要的弹性力学解的存在性问题又如此幸运地比较轻易地得到解决，主要归因于弹性力学方程统一归于二阶椭圆型方程，便于纳入微分方程解的框架.

关于弹性力学解的存在性证明，除了上述基于 Hilbert 空间理论的途径外，还存在另一种途径. 1954 年Купраце 借助于多维奇异势论和奇异积分方程证明了弹性力学平衡问题的存在性，1963 年写成一书，1965 年出版英译本 [9]. 1968 年出版专著《弹性力学和热弹性力学的数学理论的三维问题》，1979 年出版英译本 [10]. 书中将其所发展的一些理论和工具称为 "Купраце 势" 和 "Купраце 矩阵".

前一种途径适于处理变系数方程和一般的边条件，而后一种途径便于研究解的可微性和解的构造.

结构理论解的存在性问题，情况有所不同，一维结构、膜、板的情况简单，而由于壳体中曲面的几何复杂性和壳体模型的多样性，从方程出发研究壳体的存在性就相当艰难，弹性组合结构尤甚，因此进展缓慢.

多年来，许多学者对各种不同的壳体理论的算子正定性给出了证明. 例如，1974 年，Shoikhet 对 Novozhilov 的壳模型 [11] 和 Gordegiani 对 Vekua 的壳模型 [12]；1975 年，Bernadou 和 Ciarlet，对于具有固定边界的壳体 [13]；1980 年，武际可 [14] 对相当广泛的中曲面形状铰支和固定边界的壳体；1985 年，Bernadou 和 Lalanne 对 Koiter 的扁壳模型 [15]；1992 年，Ciarlet 和 Miara 对线性化的 Marguerre-von Kármán 扁壳模型 [16]；1994 年，Bernadou, Ciarlet 和 Miara 对 Koiter 模型和 Naghdi 模型的一般几何形状的中面的壳体 [17] 等. 这些工作基本上是从壳体方程出发证明壳体理论算子的正定性，也未涉及能量嵌入算子的紧致性，即未涉及动力学问题.

1982 年以来，王大钧和胡海昌发表了一组文章 [18-20]，另辟新路，用力学和数学结合的方法，对包含复杂壳体，复杂形状和复杂材料的组合弹性结构给出了统一的存在性定理. 紧接着又与其他作者合作，论证了结构模型的合理性问题 [21-24].

本文将重点评述王大钧和胡海昌的上述工作，并在涉及到组合结构时顺带介绍冯康，石钟慈和孙博华的工作 [25-29]. 他们的工作是在 20 世纪 80 年代完成的，但是，由于参与基础性研究的人很少，论文发表在当时的中国杂志上，所以国内外力学界对他们的工作了解不够. 时至现今，经过 20 多年的沉淀，已得到国内外一些学者的了解和肯定. 本文作者认为，在当今述评这项重要的有长远意义的研究成果，并且强调重视力学基础理论的重要性，还是有必要的.

2 弹性力学解的存在性

首先简述一下偏微分方程解的存在性的数学框架.

2.1 偏微分方程解

2.1.1 偏微分方程边值问题 [2]

微分算子 A 定义在内积为 (u,v) 的 Hilbert 空间 H 中的稠密线性集 M 上

$$\mathrm{A}u = f, \quad u \in M \tag{1}$$

定理 1 如果在 M 上算子是正定的，即

$$(\mathrm{A}u, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2, \quad u \in M \tag{2}$$

其中 γ 为一常数，则微分方程问题 (1) 对应的变分问题，即泛函

$$F(u) = \frac{1}{2}(\mathrm{A}u, u) - (u, f) \tag{3}$$

的极小问题在 Hilbert 空间 H_A 中存在唯一解，H_A 空间的内积为

$$(u, v)_\mathrm{A} = (\mathrm{A}u, v)$$

2.1.2 偏微分方程特征值问题 [2]

$$\mathrm{A}u = \lambda\rho u, \quad u \in M \tag{4}$$

定义空间 H_ρ, 其内积为 $(\rho u, v)$.

定理 2 如果 (1) 在 M 上算子 A 和 ρ 是正定的. (2) 算子 A 和 ρ 是使 H_{A} 中的任一有界集都是 H_ρ 中的紧致集, 即从 H_{A} 空间到 H_ρ 空间的映射是紧致的. 则方程 (4) 对应的变分问题, 即泛函

$$\Psi(u) = (\mathrm{A}u, u)/(\rho u, u) \tag{5}$$

的驻值问题有可数无穷个特征值, 只以无穷远点为聚点; 特征函数在 H, H_{A}, H_ρ 空间都是正交完全序列.

2.1.3 偏微分方程的初值问题 [8]

$$\begin{gathered}\mathrm{A}u + \rho u_{tt} = f(x,t), \quad Bu(s,t) = 0\\ u(x,0) = g_0(x), \quad u_t(x,0) = g_1(x)\end{gathered}$$

定理 3 如果 (1) 在 M 上算子 A 和 ρ 正定; (2) 算子 A 和 ρ 是使 H_{A} 中的任一有界集都是 H_ρ 中的紧致集, 即从 H_{A} 空间到 H_ρ 空间的映射是紧致的; (3)$g_0(x), g_1(x) \in U_v$ 及其他条件 (算子 A 是变量 x 的 $2m$ 阶方程). 则

$$\begin{aligned}&u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\varphi_k(x),\\ &\ddot{q}_k(t) + \lambda_k q_k(t) = f_k(t) = \int f(x,t)\varphi_k(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即振型展开法收敛.

2.1.4 Ritz 法的收敛性 [2]

定理 4 如果算子 A 正定, 则用 Ritz 近似法求解泛函 (3) 的极小值和求解泛函 (5) 的驻值的近似解在 H_{A} 的度量下收敛于精确解.

2.2 弹性力学解

弹性力学算子 $\mathrm{A_e}$

$$\mathrm{A_e}\boldsymbol{u} = -\sum_{i,k,l,m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(C_{iklm}(\boldsymbol{u}))x_k^{(0)} \tag{6}$$

各向异性体的弹性系数 C_{iklm} 不多于 21 个, 各向同性体有两个独立常数. 对于非均匀弹性体, 弹性系数是空间坐标的函数.

平衡问题

$$\mathrm{A_e}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \tag{7}$$

固有振动问题

$$\mathrm{A_e}\boldsymbol{u} = \lambda\rho\boldsymbol{u} \tag{8}$$

动力响应问题

$$\begin{gathered}\mathrm{A_e}u + \rho u_{tt} = f(x,t),\ Bu(s,t) = 0\\ u(x,0) = g_0(x),\ u_t(x,0) = g_1(x)\end{gathered} \tag{9}$$

设边界 S 是逐片光滑的, 4 类边条件: (1) 固定位移 $\boldsymbol{u}|_S = \boldsymbol{0}$, (2) 自由边界 $t(\boldsymbol{u})|_S = 0$, (3) 刚性接触 $\boldsymbol{u}_{(v)}|_S = \boldsymbol{0}$, $t(\boldsymbol{u})_{(s)}|_S = \boldsymbol{0}$, (4) 以上 3 类边界的混合边界条件.

取 H 空间为平方可积空间 L_2, 其元素为 Ω 上的平方可和向量函数, 内积为 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}\Omega$, 而 H_{A} 空间的内积为 $(\mathrm{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, 其模的平方为弹性体应变能的 2 倍, 称 H_{A} 为应变能模空间. 它的完备化空间用 H_1 表示. 以 $(\rho\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 为内积的空间称动能模空间, 其模的平方为 2 倍动能系数. 动能模空间和 L_2 空间是等价模空间. 应变能模空间到动能模空间的映射称为能量嵌入算子.

将方程 (6)~(8) 纳入偏微分方程解的框架, 可证明如下定理:

定理 5 对于以上 4 种边界条件, (1) 弹性力学算子在定义域内是正定的; (2) 弹性力学的能量嵌入算子是紧致的.

因此弹性力学的: (1) 平衡问题 (7) 的广义解存在 (在空间 H_1 中); (2) 固有振动问题 (8) 的广义解存在 (振型在空间 H_1 中); (3) 强迫力和初位移、初速度满足一定条件时, 动力响应解存在, 振型展开法收敛; (4) Ritz 近似法收敛.

3 王大钧和胡海昌有关弹性结构理论解的存在性工作及国内外评述

1982 年至 1995 年王大钧和胡海昌在《中国科学》和《力学学报》等杂志上发表了数篇论文, 用力学与数学相结合的方法, 相当彻底地解决了弹性结构理论中解的存在性问题. 其主要结果如下:

(1) 以弹性结构理论与三维弹性力学的力学联系为背景, 即以两者之间的变形联系、应变能联系和动能联系为依据, 运用泛函的性质, 建立了一个泛函分析的框架, 对各种弹性结构的两类算子的正定性和紧致性作了统一证明. 建立了结构理论算子的正定性定理和结构理论能量嵌入算子的紧致性定理. 其结论是: 对于具有给定的边界条件的弹性结构, 如果对应的弹性体的边界条件保证弹性力学算子正定、弹性力学能量嵌入算子紧致,

结构和对应的约束弹性体的应变能二次型算式等价, 结构动能系数小于对应约束弹性体的动能系数, 则在给定边界条件下的结构理论算子也是正定的, 结构理论能量嵌入算子也是紧致的. 特别地, 这些情况涵盖了具有相当广泛的边条件的各种薄壳和厚壳理论、复杂材料和复杂形状的结构理论和组合结构理论. 因此, 对于广泛的弹性结构理论, 其平衡问题、固有振动问题和动力响应的解的存在性得到证明 [16-18].

(2) 作为结构理论算子正定性和结构理论能量嵌入算子的紧致性的推论, 统一论证了弹性结构理论中线性振动的普遍性质, 即满足具有上述存在性条件的有限尺寸的弹性结构的固有频率有可数无穷个, 以无穷大为极限; 固有振型为正交完全函数系; 自由振动和强迫振动的振型展开是收敛的. 作为另一重要推论, 论证了 Ritz 近似求解法及有限元法对广泛的弹性结构理论是适用的 [17].

(3) 论证了并非任意的结构模型都自然具有两类算子的正定性和紧致性以及解的存在性, 从若干方面讨论了结构理论的合理性. 例如, 建立结构理论时, 对弹性力学中的位移、应力和应变做出的假设必须相称, 即各个力学量都有做功的可能性. 此时弹性力学中的各种能量原理在相应的结构理论中都继续成立, 结构理论的解和弹性力学的解的存在唯一性质保持一致. 这种结构理论的力学模型是合理的. 反之, 当假设不相称时, 某些或全部能量原理在结构理论中不再成立 [19]. 例如, 不满足结构和对应的弹性体的应变能的二次型算式等价, 或不满足两者的动能系数的二次型算式等价, 即使弹性力学的解存在唯一时, 对应的结构理论的解可能不存在或不唯一. 这种结构理论的力学模型是不合理的. 又例如, 结构理论的动态 Green 函数和静态 Green 函数或者都有界或者具有相同的奇性. 对于 Green 函数的某些分量有奇性的结构理论, 在该分量方向 (如计入剪切变形的板的法向, 有矩理论壳的切向, 无矩理论壳和计入剪切变形的有矩理论壳的法向和切向), 在平衡问题中设置集中弹性和刚性支承, 在动力学问题中设置集中的质量、阻尼器和支承是不合理的. 而对于 Green 函数是有界的结构理论, 设置这些集中参数则是合理的 [20-22].

上述研究成果获得国内外学者的正面评价, 主要有:

法国著名科学家 Valid 在 1995 年出版的专著*The Nonlinear Theory of Shells Through Variational Principles, From Elementary Algebra to Differential Geometry* [30] 中, 以 “关于线性情形两个吸引人的中国定理” 为题用一节 (1.16 节) 详细转述了王大钧、胡海昌建立的两个定理及其证明. 该书作者说: “一个很重要的问题数学家一直未获答案, 一直持续到 ‘中国定理’ 的发表才获得答案. 这个问题是 ‘在一般的结构理论中, 特别是对线性弹性力学的三维理论通过采用应力和/或位移假设所导出的板和壳理论中, 如何像保证三维弹性力学的解的存在性和唯一性那样仍然能保证板和壳理论解的存在性、唯一性. 1985 年北京大学的王大钧和胡海昌的题为《弹性理论中两类算子的正定性和紧致性》论文中给出了问题的答案. ”

孙博华和叶志明在文献 [28] 中指出: “王大钧和胡海昌以弹性结构理论与三维弹性力学的力学联系为背景, 即以两者之间的变形联系、应变能联系、动能联系为依据, 运用泛函分析的简单性质, 对弹性结构理论中两类算子的正定性和紧致性做了统一证明. 这样不仅可以加深理解弹性结构平衡问题的适定性和振动问题的可解性及一系列性质, 而且这种力学与数学相结合的证明方法中不涉及弹性结构的具体几何关系和方程的具体表达式. ”.

邱吉宝等 [31] 指出, “1982 年王大钧、胡海昌 [1-3] 对各种弹性结构理论的微分算子的性质作了统一的证明, 从而进一步证明了这些结构都具有上述普遍性质 $\cdots\cdots$, 同时更重要的是在证明中不涉及弹性结构理论的具体几何关系与方程, 对于相当广泛边界条件的各种壳体和组合结构的复杂情况以及其他可能提出的结构理论都可以用算子统一地给予描述并得到普遍的性质, 从而为各种复杂结构的动力分析提供了统一的理论基础. ”.

武际可 [32] 指出 “王大钧与胡海昌合作, 证明了任何基于弹性力学方程组所简化结构的方程都具有正定性. ”

4　王大钧和胡海昌有关弹性结构理论解的存在性的思路

对于某一结构理论, 其结构理论算子 A_{s} 的定义域为广义位移 $\boldsymbol{w}$ 组成的函数集 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}$, 在 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}$ 上定义 3 个内积空间.

第 1 个内积空间表示为 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{ss}}$, 相应的模的平方是

$$\|\boldsymbol{w}\|_{\mathrm{s}}^2=(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})_{\mathrm{s}}=\int_F \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}\mathrm{d}F \tag{10}$$

与平方可积空间 $L_2(F)$ 的模一致. $\boldsymbol{U}_{\rm ss}$ 称为该结构理论的位移空间, $\boldsymbol{U}_{\rm ss}$ 的完备空间 $\bar{\boldsymbol{U}}_{\rm ss}$ 是 Hilbert 空间.

第 2 个内积空间表示为 $\boldsymbol{U}_{\rm ps}$, 相应的模的定义为 2 倍应变能的平方根, 即

$$\|\boldsymbol{w}\|_{\rm ps}^2 = 2\Pi_{\rm s}(\boldsymbol{w}) \tag{11}$$

其中二次型 $\Pi_{\rm s}$ 是结构的应变能. 对于所有行之有效的结构理论, 算子 $\mathrm{A_s}$ 是线性、对称和正定的, $\boldsymbol{U}_{\rm ps}$ 的完备空间 $\bar{U}_{\rm ps}$, 称为该结构理论的应变能模空间.

第 3 个内积空间表示为 $U_{\rm ks}$, 相应的模定义为该结构的 2 倍动能系数的平方根, 即

$$\|\boldsymbol{w}\|_{\rm ks}^2 = 2K_{\rm s}(\boldsymbol{w}) = (\rho\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})_{\rm s} \tag{12}$$

其中 $K_{\rm s}$ 和 ρ 分别为结构的动能系数和广义质量密度. $U_{\rm ks}$ 的完备空间 $\bar{U}_{\rm ks}$ 称为该结构的动能模空间.

由相同元素建立的从 $U_{\rm ps}$ 到 $U_{\rm ss}$ 和从 $\bar{U}_{\rm ps}$ 到 $\bar{U}_{\rm ks}$ 的映射分别记为

$$T_{\rm ps,ss} : U_{\rm ps} \to U_{\rm ss};\ T_{\rm ps,ks} : \bar{U}_{\rm ps} \to \bar{U}_{\rm ks}$$

$T_{\rm ps,ks}$ 称为该结构理论的能量嵌入算子.

要解决的问题是: $T_{\rm ps,ss}$ 是否有界, 即结构理论算子是否正定; $T_{\rm ps,ks}$ 是否紧致, 即能量嵌入算子是否紧致.

事实上, 一个结构可以用弹性力学作更精确的分析. 这样, 对应的弹性体的位移可以用三维向量 $\boldsymbol{u}(\Omega)$ 描述, Ω 是弹性体所占区域. 所有比较位移 $\boldsymbol{u}$ 组成函数集 $U_{\rm e}$, 它是弹性体力学算子 $A_{\rm e}$ 的定义域. 同前面在结构理论中的讨论一样, 可以在 $U_{\rm e}$ 上构造 3 个内积空间, 并形成 3 个 Hilbert 空间: 第 1 对是弹性力学的位移空间 $U_{\rm se}$ 和它的完备空间 $\bar{U}_{\rm se}$; 第 2 对是空间 $U_{\rm pe}$ 和它的完备空间 $\bar{U}_{\rm pe}$(应变能模空间); 第 3 对是空间 $U_{\rm ke}$ 和它的完备空间 $\bar{U}_{\rm ke}$(动能模空间). 对于实际的弹性体, $U_{\rm se}$ 和 $U_{\rm ke}$ 是等价模空间, 在许多情况下不需加以区别.

相同元素建立的从 $U_{\rm pe}$ 到 $U_{\rm se}$, 和从 $\bar{U}_{\rm pe}$ 到 $\bar{U}_{\rm ke}$ 的映射表示为

$$T_{\rm pe,se} : U_{\rm pe} \to U_{\rm se}$$
$$T_{\rm pe,ke} : \bar{U}_{\rm pe} \to \bar{U}_{\rm ke}$$

算子 $T_{\rm pe,ke}$ 称为弹性力学的能量嵌入算子.

在定理 5 中已证明, 在 4 种边界条件下, 弹性力学算子是正定的, 即 $T_{\rm pe,se}$ 是有界的; 能量嵌入算子是紧致的, 即 $T_{\rm pe,ke}$ 是紧致的.

把结构理论中的两个问题与弹性力学中已解决的两个问题沟通起来, 从而使前者获得简明的回答.

(1) 位移之间的联系

弹性结构理论中的位移是对三维弹性力学中的位移加以约束 (如直法线假定) 后形成的, 这种约束是一种从空间 $U_{\rm ss}$ 到 $U_{\rm se}$ 的一个子集 $U_{\rm se}^{\rm r}$ 的一一对应的映照, 表示为

$$\boldsymbol{u} = T_{\rm ss,se}\boldsymbol{w}$$

因此, $U_{\rm se}^{\rm r}$ 子集是弹性力学位移空间 $U_{\rm se}$ 的一个子空间, 称为约束位移子空间 $U_{\rm se}^{\rm r} \subset U_{\rm se}$, 将这种受到位移约束的弹性体称为约束弹性体.

(2) 应变能之间的联系

三维弹性力学的约束位移子空间 $U_{\rm se}^{\rm r}$ 上的应变能

$$\Pi_{\rm e}^{\rm r} = \frac{1}{2}(A_{\rm e}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_{\rm e},\ \forall \boldsymbol{u} \in U_{\rm se}^{\rm r} \tag{13}$$

弹性结构的应变能

$$\Pi_{\rm s} = \frac{1}{2}(A_{\rm s}\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})_{\rm s},\ \forall \boldsymbol{w} \in U_{\rm ss}$$

对多数弹性结构理论, $\Pi_{\rm s} \leqslant \Pi_{\rm e}^{\rm r}$. 进一步分析发现, 如果结构模型是合理的, 则两种应变能密度的二次型算式是等价的, 即

$$\Pi_{\rm e}^{\rm r} \geqslant \Pi_{\rm s} \geqslant \alpha^2 \Pi_{\rm e}^{\rm r} \tag{14}$$

因此, $T_{\rm ps,pe}$ 有界, $\bar{T}_{\rm ps,pe}$ 有界.

(3) 动能之间的联系

由于三维弹性力学中动能包括全部位移分量产生的动能, 所以 $u \in U_{\rm se}^{\rm r}$ 产生的动能系数 $K_{\rm e}^{\rm r}$(参见式 (12)) 也包含所有位移分量的贡献. 而一般的合理模型的结构理论中, 动能系数 $K_{\rm s}$ 往往舍去了部分位移分量的贡献. 故有

$$K_{\rm e}^{\rm r} \geqslant K_{\rm s} \tag{15}$$

因此 $T_{\rm se,ss}$ 有界, $\bar{T}_{\rm ke,ks}$ 有界.

运用 Hilbert 空间理论, 可证明:

(1) 如果算子 $T_{\rm ps,pe}$, $T_{\rm pe,se}$ 和 $T_{\rm se,ss}$ 有界, 则 $T_{\rm ps,ss}$ 有界.

(2) 如果算子 $\bar{T}_{\rm ps,pe}$ 有界, $T_{\rm pe,ke}$ 紧致, $\bar{T}_{\rm ke,ks}$ 有界, 则 $T_{\rm ps,ks}$ 紧致.

由此可得到结构理论中解的存在性的两个基本定理.

结构理论算子正定性定理　对于具有给定边界条件的弹性结构, 如果 (1) 对应的弹性体的边界条件保证弹性力学算子 $A_{\rm e}$ 正定, (2) 结构和对应的约束弹性体的应变能的二次型算式等价, (3) 结构的动能系数小于对应的约束弹性体的动能系数. 则在给定边界条件下的结构理论算子 $A_{\rm s}$ 是正定的.

图 1 是结构理论算子正定性定理表示图.

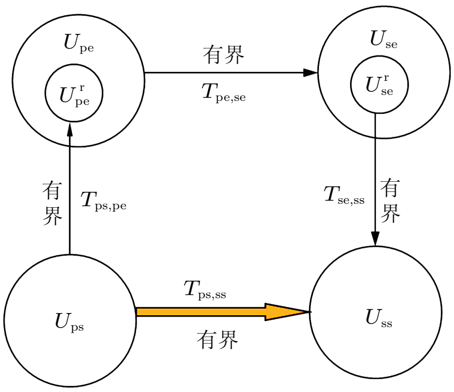

图 1　结构理论算子正定性定理表示图

满足此定理的结构理论的平衡问题的广义解存在唯一. Ritz 近似法用于求此解是收敛的.

结构理论能量嵌入算子紧致性定理　对于具有给定边界条件的弹性结构, 如果 (1) 对应的弹性体的边界条件保证弹性力学的能量嵌入算子 $T_{\rm pe,ke}$ 紧致, (2) 结构和对应的约束弹性体的应变能的二次型算式等价, (3) 结构的动能系数小于对应的约束弹性体的动能系数. 则在给定边界条件下的结构理论的能量嵌入算子 $T_{\rm ps,ks}$ 是紧致的.

图 2 是结构理论能量嵌入算子紧致性定理表示图.

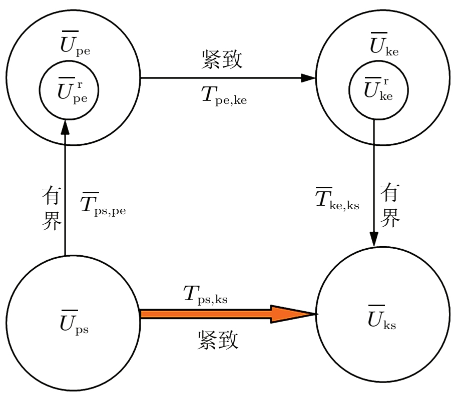

图 2　结构理论能量嵌入算子紧致性定理表示图

满足此定理的结构理论的固有振动的广义解存在, Ritz 近似法用于求此解是收敛的, 动力响应的振型展开法收敛.

5　存在性定理在梁、板、壳上的应用

5.1　应用 1 — 梁

梁的变形约束是平截面假设, 且假定横向无应力, 即 $\sigma_x = \sigma_y = 0$, 因此, 梁的理论中是单向应力状态, 取梁的轴线为 z 轴, 梁的挠度 $u(z)$ 和 $v(z)$, 位移约束应为

$$u_1 = u,\ u_2 = v,\ u_3 = -x\frac{{\rm d}u}{{\rm d}z} - y\frac{{\rm d}v}{{\rm d}z}$$

受位移约束后, 弹性体是单向应变状态. 梁和对应的约束弹性体的应变能分别记为 $\varPi_{\rm b}$, $\varPi^{\rm r}_{\rm e}$, 两者的动能系数分别记为 $K_{\rm b}$, $K^{\rm r}_{\rm e}$.

$$\varPi^{\rm r}_{\rm e} \geqslant \varPi_{\rm b} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)}\varPi^{\rm r}_{\rm e}$$

$$K^{\rm r}_{\rm e} = \frac{1}{2}\int\left[m(u^2+v^2) + I_y\left(\frac{{\rm d}u}{{\rm d}z}\right)^2 + I_x\left(\frac{{\rm d}v}{{\rm d}z}\right)^2\right]{\rm d}z \geqslant \frac{1}{2}\int m(u^2+v^2){\rm d}z$$

满足式 (14) 和式 (15).

5.2　应用 2 — 薄壳理论

在薄壳理论中也采用了 Kirchhoff 假设和垂直中面的法应力为零的假设, 记壳体中面位移为 u_0, 于是有位移假设

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1+\dfrac{z}{R_1} & 0 & -\dfrac{z}{A_1}\dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 1+\dfrac{z}{R_2} & -\dfrac{z}{A_2}\dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = T_{\rm ss,se}\boldsymbol{u}_0$$

在应力假设中

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h}\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} + \frac{12z}{h^3}\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{h}\boldsymbol{N} + \frac{12z}{h^3}\boldsymbol{M}$$

应变假设为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (e_{11}, e_{22}, e_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12})^{\rm T} = \boldsymbol{B}\left(\frac{1}{2}(e_1, e_2, 2\omega)^{\rm T} + \boldsymbol{\kappa}\right) =$$

$$\boldsymbol{B}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{\kappa}\right)$$

得到壳体和对应弹性体的应变能和动能系数

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{s}} &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{E}{2(1-\mu)}\bigg\{(e_{11}+e_{22})^2+\\
&\quad \frac{1-\mu}{1+v}[(e_{11}-e_{22})^2+\gamma_{12}^2]\bigg\}\mathrm{d}\Omega\\
\Pi_{\mathrm{e}}^{\mathrm{r}} &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)}\Big\{(e_{11}+e_{22})^2+\\
&\quad (1-2\mu)[(e_{11}-e_{22})^2+\gamma_{12}^2]\Big\}\mathrm{d}\Omega\\
K_{\mathrm{s}} &= \frac{1}{2}\int_{F} m u_0^2\mathrm{d}F\\
K_{\mathrm{e}}^{\mathrm{r}} &= \frac{1}{2}\int_{F}[m u_0^2+I(\vartheta^2+\psi^2)]\mathrm{d}F
\end{aligned}$$

易见, 满足式 (14) 和 (15) 的关系.

6 存在性定理在组合弹性结构上的应用

大家知道三维线性弹性力学解的存在性和唯一性有过许多研究, 也有很好的结果, 但是通过引入对位移或应力约束后简化三维线性弹性力学而导出的实用理论如梁、板、壳等, 是否在三维线性弹性力学成立的解的存在性和唯一性也自动对于梁、板和壳成立, 或者说三维线性弹性力学成立的解的存在性和唯一性是否在有几何或应力约束时也还成立; 更进一步讲, 如果各个结构元件 (梁、板、壳和体) 的解有存在性和唯一性, 对于有不同维 (几何的) 结构元件 (梁是一维, 板是二维, 壳是二维曲面, 体是三维) 通过连接组成的任意组合结构是否也自动具有解的存在性和唯一性, 在没有研究之前严格说是不一定的. 因为对于不同维结构元件的不同连接对于解的存在性和唯一性有本质影响, 同时不同维元件的理论模型也可以不同也产生出如何连接匹配的问题, 如有的板可以是 Kirchhoff 模型, 有的可以是 Mindlin 模型或有的是 Timoshenko 模型, 如果它们连接在一起又加上其他的结构元件, 如何保证解的存在性和唯一性不是直接就可以回答的, 实际的组合结构可能更复杂, 有些部件是大变形, 有些部件是小变形, 有些是动态, 有些可以处理成静态等.

所以, 对于组合结构理论定性和定量的研究都非常有必要, 这也是材料向复杂材料发展, 结构向复杂拓扑发展的必然要求, 详细讨论见孙博华博士论文 [27]. 王大钧和胡海昌为此做了定性分析; 对于组合结构的定量分析, 即显式的写出任何组合结构的控制方程组和边界条件的工作是由冯康、石钟慈和孙博华等完成的 [25-28].

对于组合结构的正定性分析已经有很好的成果, 这些成果对于组合结构的研究起到了非常基础性的指导意义. 从上面的介绍可以看出, 王大钧和胡海昌的工作可以推广到组合结构的定性分析. 有一些一、二维弹性结构和三维弹性体为元件而组成的组合弹性结构, 其算子记为 A_c, 位移 $\boldsymbol{u}\in D(A_c)$. 将组合结构按三维弹性力学进行考察, 如各元件的位移可用弹性体的位移加以变形约束而得到, 则组合结构的位移也可由弹性体加以相应约束而得到. 由于组合结构的应变能、动能是各元件的相应量的和, 所以组合结构和三维弹性力学的应变能和动能也具有式 (14) 和式 (15) 表示的联系. 可见, 由王和胡得到的关于结构理论的两个定理适用于组合弹性结构.

对应组合结构的定量分析方面, 由于组合结构的复杂性, 要想建立其定量的控制方程, 连接条件和边界条件非常复杂, 推导一般性的连接条件也是很困难的事情. 在组合结构一般理论研究方面, 冯康和石钟慈 [25-26] 的建立在组合流形上的组合结构的工作是非常有创造性的, 是统一处理不同维结构元件构成的任意组合结构的首次, 是数学力学理论思维上的突破, 但由于其理论起点高, 没有受到广泛的注意. 1988 年孙博华 [27] 在其博士论文中系统研究了组合结构的分析策略, 并通过引入曲线内边界概念成功推广了冯康和石钟慈 [25-26] 的工作, 从而建立了包括壳体和非线性元件的任意组合结构的控制方程和内外边界连接条件. 1988 年以来, 由于冯先生的去世, 组合结构方面的研究几乎没有进展, 只是到了 2005 年, 由冯先生的合作者石钟慈院士等 [33-34] 对线性弹性组合结构以及有限元做了进一步的研究, 但仍是在线性弹性范围内而没有研究非线性问题. 自 1979 年, 从冯康和石钟慈的突破性研究, 到孙博华 1988 年的跟进, 所得到的对于组合结构的一般性研究, 即使从现在世界范围内看都是这方面较好的成果.

对应组合结构, 要特别强调的是, 其正定性与单个元件的正定性是完全不同的. 有关这方面的研究已经在文献 [8, 11-13] 中系统地阐述. 指出组合结构的正定性与单个元件的正定性是不同的这点非常重要, 因为在研究组合结构的时候, 当你要分解这个组合结构, 并进行连接时, 就必须考虑如何确定这些待定常数, 存在着提供逐步的约束使之成为正定的关系, 以前人们可能不自觉地做这

样的事情. 现在, 组合结构的正定性分析给我们指出了一个方法, 就是组合结构由分到合的过程, 需要更加自觉地保证问题的正定性.

结构的正定性通俗地讲就是结构稳定的支撑条件, 或者说要得到使得解有唯一性的条件. 从这个意义上讲, 一个单独的三维的物体显然提供 3 个点的支撑, 即要限制 3 个方面的位移, 或者说两个方面的位移、一个方向的转动, 或者说两个方向的转动、一个方向位移, 总之, 要提供足够的约束, 使它成为正定. 按同样的原理, 对于二维的板型构建, 根据模型的不同, 通常要提供 3 个约束, 一个位移两个转动; 对一维的杆型构件来讲, 只需要一个位移一个转动, 即可确定他的正定性. 但是这些单一构件的正定性与这些构件组成的组合结构的正定性是完全不同的概念. 这是因为组合结构的正定性, 取决于这个组合结构的哪一部分作为支撑, 因为在实际情形中, 组合结构的支撑条件既可以是一维的, 也可以是二维的, 还可以是三维的, 或者是它们复杂的组合, 所以其正定性相对比较复杂. 比如说, 如果这个组合结构是由一个三维体和一个一维的杆组成, 如果这个支撑全部是由三维组合, 那么其正定性和单一三维体的正定性是一样的. 但是, 如果说这个支撑是由这个杆所提供的, 完全由杆来支撑的, 那么这个组合结构的正定性事实上就和单一的杆的正定性是一样的, 所以组合结构的正定性要比单一元件的正定性复杂得多, 也更丰富多彩, 这是组合结构的另外一个重要特点.

详细内容请看冯康和孙博华等的论文 [25-29].

7　结　语

王大钧、胡海昌关于结构理论解的存在性的研究成果是一项开创性的工作, 其主要贡献在于, 对复杂的壳体、复杂形状及材料的组合结构的结构理论的平衡, 固有振动和动力响应问题的解的存在性作了统一的论证. 相当彻底地解决了固体力学中的这一基础性的理论问题. 这是一项具有长远意义的科学成果. 另外, 他们所运用的力学与数学相结合的研究方法在处理复杂的力学问题时显得灵活和有效.

他们的工作属于定性分析, 在结构理论解的存在性研究方面, 把定性分析和定量分析结合起来, 使这方面的研究工作更前进一步, 是我们所期待的.

致谢: 作者感谢北京大学工学院院长陈十一教授和余振苏教授的邀请. 本文是作者 2011 年访问北京大学工学院期间完成, 作者感谢与王大钧教授和李存标教授的多次讨论.

参 考 文 献

1 Courant R, Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. New York: Interscience Publising, INC, 1953

2 Михин С Г. Проблема Минимума Квадратичного Функциона λa. Государственное издательство тихнико теоретической литературы, 1952.

3 Friedrichs K. On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality. *Annals of Mathematics*, 1947, 48(2)

4 Михлин С Т. Вариационные Методы Ращения задач Математической физики, успехи Матем наук, Т , м. Вып . 6 (40), 1950.

5 Эйдус Д М. О смещанной задаче теорин упгугости, дАн сссР , Т. 76, No. 2, 1951.

6 Payne L E, Weinberger H F. On Korn's inequality. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1961, 8

7 Fichera G. Linear elliptic differential systems and eigenvalue problem. Lecture notes in mathematics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1965

8 Fichera G. Existense theorems in elasticity. Encyclopedia of Physics. In: Flügge S, ed. a/2, New York: Springer-Verlog, 1972

9 Kupradze V D. Potential Methods in the Theory of Elasticity. Colomiba: Jerusalem, 1965. 32

10 Kupradze V D, Gegelia F G, Basheleishvili M O, et al. Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity. California: North-Holland Publishing Company, 1979

11 Shoikhet B A. On existence theorems in linear shell theory. *PMM*, 1974, 38: 567-571

12 Gordegiani D G. On the solveability of some boundary value problems for a variant of the theory of thin shells. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 215

13 Bernadou M, Ciarlet P G. Sur L' Ellipticite du Models linéaire de Cogues de W. T. Koiter. Lecture Notes in Economics and Mathemetics Systems 134. Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, Second Inter. Symp. Dec. 1975, 15-19. New York: Springer-Verlog, 1976. 89-136

14 武际可. 薄壳方程组椭圆形条件的证明. 固体力学学报, 1981, 4: 435-444

15 Bernadou M, Lalanne B. Sur l'approximation des coques minces, par des méthods B-splines et éléments finis. In: Grellier J P, Campel G M. eds. Tendances Actuelles en Calcul des structures. Paris: Editions Pluralis, 1985. 939-958

16 Ciarlet P G, Miara B. Justification of the two-dimensional equations of a linearly elastic shallow shell. *Comm. Pare Apple. Math.*, 1926, 45: 327-360

17 Bernadou M, Ciarlet P G, Miara B. Existence theorems for two-dimensional linear shell theories. *Journal of Elasticity*, 1994, 34: 111-138

18 王大钧, 胡海昌. 弹性结构理论中两类算子的正定性和紧致性的统一证明. 力学学报, 1982, 18(2): 111-121

19 王大钧, 胡海昌. 弹性结构理论中线性振动普遍性质的统一论证. 振动与冲击, 1982, 1: 6-16

20 Wang D J, Hu H C. Positive definiteness and compactness of two kind of operator in theories of elastic structures.

Scientia. Sinica, (Series A), 1985, XXVIII(7): 727-739
21 胡海昌. 广义变分原理在近似解中的合理利用. 力学学报, 1982, 18(2): 1-7
22 Wang D J, Wang W Q. The reasonableness problems of theories of structures carrying concentrated masses, springs and supports in vibration Problems. *Acta Mechanica Solida Sinca*, 1989, 2: 247-251
23 Wang Q, Wang D J. Singularity under a concentrated force in elasticity. *Applied Mathematics And Mechanics*, 1993, 14(8): 707-711
24 Leung A Y T, Wang D J, Wang Q. On concentrated masses and stiffnesses in structural theories. *Int. J. of Structural Stability and Dynamics*, 2004, 4(2): 171-179
25 冯康. 组合流形上的椭圆方程与组合弹性结构. 计算数学, 1979, 1(3): 199-208
26 冯康, 石钟慈. 弹性结构的数学理论. 北京: 科学出版社, 1984
27 孙博华. 组合弹性结构的分析理论及应用: [博士论文]. 兰州: 兰州大学, 1988. 12
28 孙博华, 叶志明. 组合弹性结构的力学分析. 中国科学, 2009, 39(3): 394-413
29 Sun B H, Ye Z M. Formulation of elastic multi-structures. *Science in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy*, 2009, 52(6): 935-953
30 Valid R. The Nonlinear Theory of Shells Through Variational Principles. From Algebra to Differential Geometry. New Jersey: John Wiley & Sons, 1995
31 邱吉宝, 向树红, 张正平. 计算结构动力学. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2009
32 武际可. 近代力学在中国的传播与发展. 北京: 高等教育出版社, 2005
33 黄建国, 石钟慈, 徐一峰. 一般组合弹性结构的数学模型. 中国科学 A 辑: 数学, 2005, 35(6): 664-684
34 黄建国, 石钟慈, 徐一峰. 一般组合弹性结构的有限元分析. 中国科学 A 辑: 数学, 2005, 35(10): 1100-1119

ON EXISTENCE OF THE SOLUTION IN THEORIES OF STRUCTURES

SUN Bohua†

Faculty of Engineering, Cape Peninsula University of Technology Cape Town, South Africa

Abstract This article explains the basic concepts relevant to the existence of solutions and its significance for the linear elasticity theory and linear elastic structure, outlines the solution of differential equations and the existence of the elasticity, evaluates the original contribution to the existence of solutions of the multi-structure by Wang Dajun and Hu Hai-chang, and presents Wang-Hu positive definiteness and compactness in the theories of elastic structures.

Keywords theory of structures, operator of theory of structures, existence theorems, positive definite operator, compact operator

孙博华, 男, 1963 年 12 月 21 日出生, 江苏徐州人. 现为南非科学院院士, 南非皇家学会会员, 南非开普半岛科技大学 (CPUT) 终身教授和 Senate , 应用技术研究中心主任. 主要研究复杂结构, 壳体力学, MEMS 和复杂流动等, 被评为《2010 年海外华人十大新闻人物》, *Journal of Mechanics and MEMS* (JMM) 学报创刊主编, *Advances in Materials and Mechanics* (AMM) 丛书主编, *Advances in Engineering Mechanics* (AEM) 丛书主编, *Journal of Nanomaterials*学报 Associate Editor 等.

† E-mail: sunb@cput.ac.za